Istituto Nazionale di Alta Matematica F. SEVERI

Prova scritta del 26 febbraio 2024

Concorso a 12+6 borse di studio per l'avviamento alla ricerca
riservate a iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica a.a. 2023-2024

Istruzioni per la prova.

- Il tempo a disposizione è di tre ore e mezzo.
- È vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino. Al termine della prova verrà chiesto di chiudere quest'ultimo nella busta piccola, mettere la busta piccola nella grande e aggiungerre i fogli con lo svolgimento degli elaborati.

  Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato, pena l'annullamento della prova.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

ESERCIZI GRUPPO A

Esercizio A1. Sia $n \geq 0$ un intero. Definiamo la funzione $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ per mezzo della relazione $T_n(x) = \cos n\theta$, dove $x = \cos\theta \in [-1,1]$.

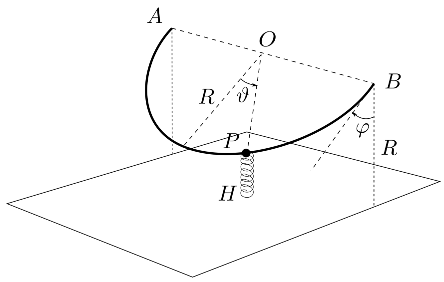
1. Mostrare che T_n è un polinomio in x di grado n a coefficienti interi.
2. Mostrare che vale la formula di ricorrenza $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
3. Dimostrare che vale la formula di ortogonalità
$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ \pi & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } m = n \geq 1. \end{cases}$$
4. Dimostrare, calcolandola esplicitamente, che la funzione generatrice
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,t^n$$
è una funzione razionale in $\mathbb{Q}(x,t)$.

Esercizio A2. Le intensità I_1 e I_2 di due sorgenti luminose extragalattiche variabili (misurate in unità convenzionali) sono distribuite normalmente con valori attesi rispettivamente 3.2 e 4.5 e deviazioni standard rispettivamente 0.3 e 0.4, e sono indipendenti. Le due sorgenti sono lungo la stessa linea di vista, cosicché si sommano senza interferire.

1. Determinare la funzione di densità della somma $I_1 + I_2$, il suo valore atteso e la sua deviazione standard.
2. Determinare la probabilità che l'intensità somma sia superiore a 9.
3. Determinare un intervallo di confidenza al 98% per ciascuna delle due intensità, e un intervallo di confidenza al 95% per la somma delle due.

Esercizio A3. Gli estremi A e B di una semicirconferenza materiale di raggio R e massa M si trovano su una retta orizzontale a quota R rispetto a un piano orizzontale, e la semicirconferenza può ruotare senza attrito attorno ad essa. Sulla semicirconferenza può muoversi senza attrito un punto P di massa m, e il punto è richiamato sul piano orizzontale da una forza elastica lineare di costante k, ossia $\mathbf{F} = -k(P - H)$, dove H è il piede della perpendicolare di P sul piano. Sul punto e sulla semicirconferenza agisce poi la forza peso.

1. Determinare le posizioni di equilibrio interne e di confine e discuterne la stabilità.
2. Scrivere la lagrangiana del sistema rispetto ai parametri indicati in figura.



Esercizio A4. Sia $V = C^0[a,b]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue reali definite sull'intervallo $[a,b]$, $P = \{x_i \in [a,b],\ i = 0,\dots,N\}$ con $N \geq 0$ intero, un insieme di punti distini $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, e sia $\mathscr{P}_n$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad n ($n = 0,1,\dots$).

1. Per N fissato discutere esistenza ed unicità del polinomio interpolatore $p \in \mathscr{P}_n$ tale che $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,N$, al variare di n.
2. Nel caso in cui $n = N$ trovare una base di polinomi $\{L_j\}$, $j = 0,\dots,N$ per lo spazio vettoriale $\mathscr{P}_n$ tali che
$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases},\quad i,j = 0,1,\dots,N.$$
Dimostrare che
$$\sum_{j=0}^{N} L_j(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
3. Nel caso in cui $n = N$, detto p_N polinomio interpolatore definito precedentemente, se $f \in C^{(N+1)}([a,b])$ si dimostri che per ogni $x \in (a,b)$ esiste un valore $\xi \in (a,b)$ tale che
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{i=0}^{N}(x - x_i).$$

Esercizio A5. Dati i valori reali $U_0, U_1, \dots, U_{n+1}$, e $c_1, \dots, c_n \geq 0$ per $n > 0$ intero,

1. dimostrare il principio del massimo discreto,
$$-U_{j+1} + (2 + c_j)U_j - U_{j-1} \leq 0 \text{ per } 1 \leq j \leq n,\ U_0 \leq 0,\ U_{n+1} \leq 0 \Rightarrow U_j \leq 0,\ 1 \leq j \leq n.$$

Dato un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, due funzioni g, $q \in C^0([a,b])$, $q \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, un intero $N > 0$, sia $h = (b-a)/(N+1)$, $x_j = a + jh$, $j = 0,\dots,N+1$. Si approssimi il problema ai limiti
$$-u''(x) + q(x)u(x) = g(x),\ a < x < b;\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,$$
con $u \in C^2([a,b])$, come
$$-\left(\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}\right) + q(x_i)U_i = g(x_i),\ U_0 = \alpha,\ U_{N+1} = \beta,$$
con U funzione discreta definita sulla griglia $\{x_j\}$.

2. Scrivere il problema in forma matriciale $A_h\mathbf{U} = \mathbf{b}_h$, e $U_0 = \alpha$, $U_{N+1} = \beta$, con una opportuna matrice A_h e vettori $\mathbf{U}$ e $\mathbf{b}_h$. Dimostrare che $\mathbf{U}$, quando $\alpha, \beta \leq 0$, soddisfa il principio del massimo discreto.
3. Dimostrare che esiste una unica soluzione del problema discreto $A_h\mathbf{U} = \mathbf{b}_h$.

Esercizi gruppo B

Esercizio B1. Sia G un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$. Muniamo $GL_n(\mathbb{R})$ e i suoi sottogruppi della topologia indotta da $M_n(\mathbb{R})$, le matrici $n \times n$ a coefficienti reali con topologia indotta dalla norma definita da $||M|| := \sup\{|Mu|,\ u \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |u| \leq 1\}$.

1. Sia $M \in GL_n(\mathbb{R})$, dimostrare che l'applicazione $l_M : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ data da $l_M(N) = MN$ è un omeomorfismo.
2. Dimostrare che se G è aperto in $M_n(\mathbb{R})$, allora è anche chiuso in $M_n(\mathbb{R})$:
3. Dimostrare che per ogni $R \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $||R|| < 1$, si ha che $(I - R) \in GL_n(\mathbb{R})$ ed esprimere $(I - R)^{-1}$ come una serie convergente.
4. Dedurre che $GL_n(\mathbb{R})$ è un aperto di $M_n(\mathbb{R})$ e che $M \mapsto M^{-1}$ è un omeomorfismo di $GL_n(\mathbb{R})$.
5. Sia V un intorno di I in G tale che $V^{-1} = V$ dove $V^{-1} = \{M^{-1} \mid M \in V\}$.
   - Dimostrare l'esistenza di un tale V:
   - Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, se $V^n = \{M_1 \cdots M_n \mid M_i \in V, \forall 1 \leq i \leq n\}$, allora V^n è aperto.
   - Poniamo $G_0 = \bigcup_{n \geq 1} V^n$. Dimostrare che G_0 è un sottogruppo aperto di G e che $G_0 = G$ quando G è connesso.

Esercizio B2. Una curva piana convessa C chiusa, con l'origine al suo interno, può essere determinata dalle sue rette di supporto

$$\cos\theta \cdot x(\theta) + \sin\theta \cdot y(\theta) = p(\theta),$$

che sono tangenti alla curva in un unico punto $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ per ogni θ fissato.
La funzione $p(\theta)$ è detta funzione di supporto, θ è la coordinata polare e assumiamo che $p(\theta) > 0$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Dimostrare che la retta sopra definita è tangente al punto

$$\alpha(\theta) = (p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta,\ p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta).$$

2. Dimostrare che la curvatura della curva in $\alpha(\theta)$ vale $(p(\theta) + p''(\theta))^{-1}$.
3. Dimostrare che la lunghezza di α è data da $\int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta$.
4. Dimostrare tramite il teorema di Green che l'area all'interno di una curva piana chiusa parametrizzata da α è data da $\int_\alpha (xdy - ydx)$.
5. Dimostrare che l'area inscritta all'interno di α è data da $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p(\theta)^2 - p'(\theta)^2)d\theta$.

Esercizio B3. Diremo che una matrice simmetrica reale è definita positiva se tutti i suoi autovalori sono strettamente positivi.

1. Si dimostri che per ogni matrice simmetrica reale definita positiva S esiste un'unica matrice simmetrica reale definita positiva T tale che $T^2 = S$.
2. Si dimostri che per ogni matrice reale invertibile $A \in M_n(\mathbb{R})$ esistono un'unica matrice simmetrica definita positiva S e un'unica matrice ortogonale U tale che $A = US$. [Suggerimento: si osservi che $A = US \Rightarrow {}^tAA = {}^t(US)US = S^tUUS = S^2$.]

Esercizio B4. Sia G un gruppo finito. Il centralizzante di un elemento $g \in G$ è l'insieme $C_g := \{h \in G | gh = hg\}$. La classe di coniugio di g è il sottoinsieme $\{h^{-1}gh | h \in G\}$ di G. Il centro di G è l'insieme $Z(G) := \{g \in G | C_g = G\}$.

1. Si dimostri che C_g è un sottogruppo di G.
2. Si dimostri la formula delle classi: $o(G) = \sum_{g \in S} o(G)/o(C_g)$ dove S è un qualunque sottoinsieme di G che contiene esattamente un elemento di G per ogni sua classe di coniugio.
3. Si dimostri che se G ha ordine p^n, p primo, $n \geq 1$, allora $Z(G)$ ha ordine almeno p.

Esercizio B5. **1.** Siano f_1, f_2, f_3 le funzioni razionali definite da

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-2x^2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-3x^2}.$$

Si dimostri che f_1, f_2, f_3 sono linearmente indipendenti.

2. Sia V lo spazio vettoriale generato da f_1, f_2, f_3 e sia $T : V \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base (f_1, f_2, f_3) in V e alla base canonica (e_1, e_2, e_3) in $\mathbb{R}^3$. Calcolare gli autovalori di A e mostrare che A è diagonalizzabile.

3. Mostrare che $\ker T$ ha dimensione 1 e calcolarne un generatore g.

4. Avendo scritto $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, determinare le radici di $P(x)$.

5. Siano $m \geq n$ due interi positivi e $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ due applicazioni lineari. Assumiamo che $\ker T_1 \cap \ker T_2 = \{0\}$. Si dimostri che esistono $a, b, \in \mathbb{R}$ tali che $aT_1 + bT_2$ è iniettiva, oppure si trovi un controesempio in cui $aT_1 + bT_2$ non è iniettiva per nessuna scelta di $a, b \in \mathbb{R}$.

TABELLA DEI VALORI DI $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-x^2/2}\,dx$ AL VARIARE DI z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000000	0.003989	0.007978	0.011967	0.015953	0.019939	0.023922	0.027903	0.031881	0.035856
0.1	0.039828	0.043795	0.047758	0.051717	0.055670	0.059618	0.063559	0.067495	0.071424	0.075345
0.2	0.079260	0.083166	0.087064	0.090954	0.094835	0.098706	0.102568	0.106419	0.110261	0.114091
0.3	0.117911	0.121719	0.125515	0.129299	0.133071	0.136830	0.140576	0.144308	0.148027	0.151731
0.4	0.155421	0.159096	0.162757	0.166402	0.170031	0.173644	0.177241	0.180822	0.184386	0.187933
0.5	0.191462	0.194974	0.198468	0.201944	0.205401	0.208840	0.212260	0.215661	0.219042	0.222404
0.6	0.225746	0.229068	0.232371	0.235652	0.238913	0.242153	0.245372	0.248571	0.251747	0.254902
0.7	0.258036	0.261147	0.264237	0.267304	0.270349	0.273372	0.276372	0.279349	0.282304	0.285236
0.8	0.288144	0.291029	0.293891	0.296730	0.299545	0.302337	0.305105	0.307849	0.310570	0.313267
0.9	0.315939	0.318588	0.321213	0.323814	0.326391	0.328943	0.331472	0.333976	0.336456	0.338912
1.0	0.341344	0.343752	0.346135	0.348495	0.350830	0.353140	0.355427	0.357690	0.359928	0.362143
1.1	0.364334	0.366500	0.368643	0.370761	0.372856	0.374928	0.376975	0.378999	0.380999	0.382976
1.2	0.384930	0.386860	0.388767	0.390651	0.392512	0.394350	0.396165	0.397957	0.399727	0.401474
1.3	0.403199	0.404902	0.406582	0.408240	0.409877	0.411491	0.413085	0.414656	0.416206	0.417735
1.4	0.419243	0.420730	0.422196	0.423641	0.425066	0.426470	0.427855	0.429219	0.430563	0.431887
1.5	0.433192	0.434478	0.435744	0.436991	0.438220	0.439429	0.440620	0.441792	0.442946	0.444082
1.6	0.445200	0.446301	0.447384	0.448449	0.449497	0.450528	0.451542	0.452540	0.453521	0.454486
1.7	0.455434	0.456367	0.457283	0.458184	0.459070	0.459941	0.460796	0.461636	0.462462	0.463273
1.8	0.464070	0.464852	0.465620	0.466375	0.467115	0.467843	0.468557	0.469258	0.469946	0.470621
1.9	0.471283	0.471933	0.472571	0.473196	0.473810	0.474412	0.475002	0.475581	0.476148	0.476704
2.0	0.477250	0.477784	0.478308	0.478822	0.479325	0.479818	0.480300	0.480774	0.481237	0.481691
2.1	0.482135	0.482571	0.482997	0.483414	0.483822	0.484222	0.484614	0.484996	0.485371	0.485738
2.2	0.486097	0.486448	0.486790	0.487126	0.487454	0.487776	0.488089	0.488396	0.488696	0.488989
2.3	0.489276	0.489555	0.489829	0.490097	0.490358	0.490613	0.490862	0.491106	0.491343	0.491576
2.4	0.491803	0.492024	0.492240	0.492451	0.492656	0.492857	0.493053	0.493244	0.493431	0.493613
2.5	0.493790	0.493963	0.494132	0.494297	0.494457	0.494614	0.494766	0.494915	0.495060	0.495201
2.6	0.495339	0.495473	0.495603	0.495730	0.495855	0.495975	0.496093	0.496207	0.496319	0.496427
2.7	0.496533	0.496636	0.496736	0.496833	0.496928	0.497020	0.497110	0.497197	0.497282	0.497365
2.8	0.497445	0.497523	0.497599	0.497672	0.497744	0.497813	0.497881	0.497947	0.498011	0.498073
2.9	0.498134	0.498192	0.498249	0.498305	0.498358	0.498411	0.498461	0.498511	0.498558	0.498605
3.0	0.498650	0.498693	0.498736	0.498777	0.498817	0.498855	0.498893	0.498929	0.498965	0.498999
3.1	0.499032	0.499064	0.499095	0.499125	0.499155	0.499183	0.499211	0.499237	0.499263	0.499288
3.2	0.499312	0.499336	0.499359	0.499381	0.499402	0.499422	0.499442	0.499462	0.499480	0.499499
3.3	0.499516	0.499533	0.499549	0.499565	0.499581	0.499595	0.499610	0.499624	0.499637	0.499650
3.4	0.499663	0.499675	0.499686	0.499698	0.499709	0.499719	0.499729	0.499739	0.499749	0.499758
3.5	0.499767	0.499775	0.499784	0.499792	0.499799	0.499807	0.499814	0.499821	0.499828	0.499834
3.6	0.499840	0.499846	0.499852	0.499858	0.499863	0.499868	0.499873	0.499878	0.499883	0.499887
3.7	0.499892	0.499896	0.499900	0.499904	0.499907	0.499911	0.499915	0.499918	0.499921	0.499924
3.8	0.499927	0.499930	0.499933	0.499935	0.499938	0.499940	0.499943	0.499945	0.499947	0.499949
3.9	0.499951	0.499953	0.499955	0.499957	0.499959	0.499960	0.499962	0.499964	0.499965	0.499966
4.0	0.499968	0.499969	0.499970	0.499972	0.499973	0.499974	0.499975	0.499976	0.499977	0.499978