Istituto Nazionale di Alta Matematica F. SEVERI

Prova scritta del 14 aprile 2023

Concorso a 8+3 borse di studio per l'avviamento alla ricerca
riservate a iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica a.a. 2022-2023

Istruzioni per la prova.

- Il tempo a disposizione è di tre ore e mezzo.
- È vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino. Al termine della prova verrà chiesto di chiudere quest'ultimo nella busta piccola, mettere la busta piccola nella grande e aggiungerre i fogli con lo svolgimento degli elaborati.

  Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato, pena l'annullamento della prova.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

ESERCIZI GRUPPO A

Esercizio A1. Sia $V = M_n(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n con coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.

1. Si dimostri che la funzione $\mathrm{tr}\colon V \to \mathbb{K}$ che associa a ogni matrice la sua traccia è un'applicazione lineare.
2. Si dimostri che per ogni coppia di matrici $A, B \in V$ vale $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Si dimostri che ogni elemento f del duale di V per cui valga $f(AB) = f(BA)$ è multiplo di tr.

Esercizio A2. Sia G un gruppo finito di cardinalità $|G| \geq 2$, e sia $C \subset G$ una sua classe di coniugio.

1. Si dimostri che la cardinalità $|C|$ di C è al più $\frac{|G|}{2}$.
2. Si dimostri che se $2|C| = |G|$ allora il prodotto di due elementi qualunque di C non sta in C.
3. Si dimostri che se $2|C| = |G|$ allora il complementare $G \setminus C$ è un sottogruppo Abeliano di G di ordine dispari.

Esercizio A3. Sia $P(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi con $P(0) > 0$ e sia n il grado di P. Assumiamo che $n \geq 2$. Assumiamo inoltre che P abbia una radice semplice reale $\theta > 1$ e tutte le altre $n-1$ radici all'interno del disco aperto $\{|x| < 1\}$.

1. Si dimostri che P è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.
2. Sia $Q(x) = x^n P(x^{-1})$. Si dimostri che se esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $P(x) = \lambda Q(x)$ allora $P(x) = x^2 + ax + 1$, per qualche $a \in \mathbb{Z}$.
3. Sia
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
con P e Q come sopra. Si dimostri che nell'espansione in serie di Taylor di f in $x = 0$, diciamo
$$f(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k,$$
i coefficienti b_k sono interi e $b_0 \geq 1$.

4. Si dimostri che se esiste $k^* \in \mathbb{N}$ tale che $b_k = 0$ per ogni $k \geq k^*$ allora di nuovo $P(x) = x^2 + ax + 1$, per qualche $a \in \mathbb{Z}$.

Esercizio A4. Si consideri il gruppo speciale lineare a coefficienti interi, ovvero

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : \; a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \; ad - bc = 1 \right\}.$$

Similmente, denotiamo con $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ il gruppo di matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con determinante congruo a 1 modulo n.

1. Siano $c, d \in \mathbb{Z}$ tali che $(c,d) = p^s$, dove p è un primo, $s \geq 1$ e $p^{s+1} \nmid c$ (si indica con (c,d) il massimo comun divisore di c e d). Mostrare che se (c,d) è coprimo con n, allora esiste $H \in \mathbb{Z}$ tale che $(c, d + Hn) = 1$.
2. Dimostrare che la conclusione del punto precedente vale per c, d arbitrari; in altre parole, dati $c, d \in \mathbb{Z}$ tali che (c,d) è coprimo con n, allora esiste $H \in \mathbb{Z}$ tale che $(c, d + Hn) = 1$.
3. Sia $\psi_n : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ la mappa di riduzione dei coefficienti modulo n. Utilizzando il punto 2, si dimostri che ψ_n è un omomorfismo di gruppi suriettivo.

Esercizio A5. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con lunghezza d'arco s. Supponiamo che α sia regolare e che la curvatura $k(s)$ e la torsione $\tau(s)$ di α siano non nulle per ogni $s \in I$. Allora α è detta di Bertrand se esiste $\overline{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ tale che le rette normali di α e $\overline{\alpha}$ sono uguali per ogni $s \in I$. In tal caso possiamo scrivere

$$\overline{\alpha}(s) = \alpha(s) + r(s)n(s),$$

dove n è il vettore unitario normale ad α.

1. Dimostrare che r è costante.
2. Calcolare $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, dove θ è l'angolo tra $\overline{t} := \overline{\alpha}'$ e $t := \alpha'$, e dimostrare che sono costanti.
3. Dimostrare che se α è di Bertrand, allora esistono due costanti A e B diverse da zero tali che

$$Ak(s) + B\tau(s) = 1 \quad \forall s \in I.$$

4. Dimostrare che è vero anche il viceversa.

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio B1. Sia $V = C^0[a,b]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue reali definite sull'intervallo $[a,b]$ e sia $\mathscr{P}_n$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad n ($n = 0, 1, \ldots$). Si munisca V di una norma $\|\cdot\|$.

1. Per ogni fissato grado n e per ogni fissata $f \in V$ si dimostri che esiste $g_f \in \mathscr{P}_n$ tale da rendere minimo l'errore di approssimazione

$$\|u - f\|, \; u \in \mathscr{P}_n.$$

2. Si dimostri che l'insieme $\mathscr{M}$ degli elementi di $\mathscr{P}_n$ che realizzano la migliore approssimazione è un insieme convesso.
3. Nel caso in cui la norma in V sia la norma indotta dal prodotto scalare $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, dimostrare l'unicità del polinomio di migliore approssimazione. Si dimostri inoltre che, posto $\delta = (f - g_f)$, tale vettore è ortogonale a $\mathscr{P}_n$ rispetto al suddetto prodotto scalare.

Esercizio B2. Sia A la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 2 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 2 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \epsilon < 1.$$

1. Mostrare che A è definita positiva.

Si consideri il metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \alpha\left((I-A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}\right) + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(k)}, \qquad k \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3,$$

per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

2. Per quali valori di α il metodo converge?
3. Definiamo velocità asintotica $R(B)$ di un metodo iterativo, con matrice d'iterazione B, il numero $R(B) = -\ln(\rho(B))$, dove $\rho(B)$ è il raggio spettrale di B. Per quale valore di α il metodo proposto ha velocità asintotica massima?

Esercizio B3. Data una funzione $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x)x^{\sigma-1} \in L^1([0,\infty))$ per $\sigma \in [a,b]$, si definisca la trasformata integrale

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx, \qquad \Re(s) \in [a,b].$$

La funzione F è detta trasformata di Mellin di f.

Si assuma che $f \in C^\infty$ e a supporto compatto in $(0,\infty)$.

1. Si esprima la trasformata di Mellin della derivata n-esima $f^{(n)}$ in termini della trasformata di Mellin di f.
2. Si dimostri che F è una funzione intera e a decadimento rapido in strisce verticali, ovvero che se $A, B \in \mathbb{R}$ con $A \leq B$, allora per ogni k fissato vale

$$\lim_{\substack{|s|\to\infty \\ A \leq \Re(s) \leq B}} s^k F(s) = 0.$$

Per $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 0$, si indichi con $\Gamma(s)$ la trasformata di Mellin della funzione e^{-x}, ovvero

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx.$$

3. Si mostri che vale l'equazione funzionale $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ per $\Re(s) > 0$.
4. Si mostri che $\Gamma(s)$ si estende ad una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli semplici per $s = 0, -1, -2, \ldots$. In particolare, si mostri che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, si ha

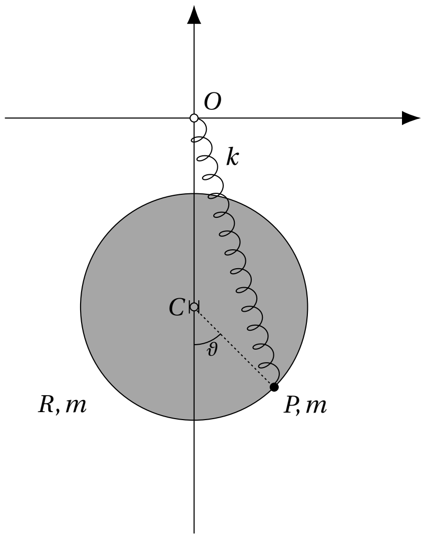
$$\operatorname*{Res}_{s=n} \Gamma(s)\Gamma(-s) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Esercizio B4. Un corpo rigido piano è formato da un disco di massa m e raggio R a cui è saldato sul bordo un punto materiale P anch'esso di massa m. Il corpo rigido si muove in un piano verticale, in modo che il centro C del disco possa scorrere sull'asse verticale di un sistema di riferimento Oxy e il disco possa ruotare attorno ad esso. Una forza elastica di coefficiente $k > 0$ e polo l'origine O agisce sul punto P e tutto il sistema è sottoposto alla forza peso. Supposti i vincoli lisci e posto

$$\lambda = \frac{mg}{kR},$$

si chiede di:

1. Trovare le posizioni di equilibrio del corpo rigido al variare di λ.
2. Studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ.
3. Determinare l'energia cinetica del sistema e la sua matrice di rappresentazione K rispetto alle coordinate lagrangiane.



Esercizio B5. Sia dato un pezzo di lunghezza L distribuita normalmente con valore atteso 10 cm e deviazione standard 0.2 cm. A seconda della lunghezza, i pezzi sono classificati in tre tipologie: quelli troppo corti, con $L < 9.75$ cm; quelli troppo lunghi, con $L > 10.05$ cm; e i restanti, che sono buoni.

1. Si effettuano 10 produzioni indipendenti e si chiede la probabilità che 2 pezzi siano troppo corti, 2 troppo lunghi e 6 siano buoni.

Una variabile aleatoria bidimensionale (X, Y) è distribuita uniformemente sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

2. Si calcoli la distribuzione della funzione $Z = X^2 Y$.

TABELLA DEI VALORI DI $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-x^2/2}\,dx$ AL VARIARE DI z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000000	0.003989	0.007978	0.011967	0.015953	0.019939	0.023922	0.027903	0.031881	0.035856
0.1	0.039828	0.043795	0.047758	0.051717	0.055670	0.059618	0.063559	0.067495	0.071424	0.075345
0.2	0.079260	0.083166	0.087064	0.090954	0.094835	0.098706	0.102568	0.106419	0.110261	0.114091
0.3	0.117911	0.121719	0.125515	0.129299	0.133071	0.136830	0.140576	0.144308	0.148027	0.151731
0.4	0.155421	0.159096	0.162757	0.166402	0.170031	0.173644	0.177241	0.180822	0.184386	0.187933
0.5	0.191462	0.194974	0.198468	0.201944	0.205401	0.208840	0.212260	0.215661	0.219042	0.222404
0.6	0.225746	0.229068	0.232371	0.235652	0.238913	0.242153	0.245372	0.248571	0.251747	0.254902
0.7	0.258036	0.261147	0.264237	0.267304	0.270349	0.273372	0.276372	0.279349	0.282304	0.285236
0.8	0.288144	0.291029	0.293891	0.296730	0.299545	0.302337	0.305105	0.307849	0.310570	0.313267
0.9	0.315939	0.318588	0.321213	0.323814	0.326391	0.328943	0.331472	0.333976	0.336456	0.338912
1.0	0.341344	0.343752	0.346135	0.348495	0.350830	0.353140	0.355427	0.357690	0.359928	0.362143
1.1	0.364334	0.366500	0.368643	0.370761	0.372856	0.374928	0.376975	0.378999	0.380999	0.382976
1.2	0.384930	0.386860	0.388767	0.390651	0.392512	0.394350	0.396165	0.397957	0.399727	0.401474
1.3	0.403199	0.404902	0.406582	0.408240	0.409877	0.411491	0.413085	0.414656	0.416206	0.417735
1.4	0.419243	0.420730	0.422196	0.423641	0.425066	0.426470	0.427855	0.429219	0.430563	0.431887
1.5	0.433192	0.434478	0.435744	0.436991	0.438220	0.439429	0.440620	0.441792	0.442946	0.444082
1.6	0.445200	0.446301	0.447384	0.448449	0.449497	0.450528	0.451542	0.452540	0.453521	0.454486
1.7	0.455434	0.456367	0.457283	0.458184	0.459070	0.459941	0.460796	0.461636	0.462462	0.463273
1.8	0.464070	0.464852	0.465620	0.466375	0.467115	0.467843	0.468557	0.469258	0.469946	0.470621
1.9	0.471283	0.471933	0.472571	0.473196	0.473810	0.474412	0.475002	0.475581	0.476148	0.476704
2.0	0.477250	0.477784	0.478308	0.478822	0.479325	0.479818	0.480300	0.480774	0.481237	0.481691
2.1	0.482135	0.482571	0.482997	0.483414	0.483822	0.484222	0.484614	0.484996	0.485371	0.485738
2.2	0.486097	0.486448	0.486790	0.487126	0.487454	0.487776	0.488089	0.488396	0.488696	0.488989
2.3	0.489276	0.489555	0.489829	0.490097	0.490358	0.490613	0.490862	0.491106	0.491343	0.491576
2.4	0.491803	0.492024	0.492240	0.492451	0.492656	0.492857	0.493053	0.493244	0.493431	0.493613
2.5	0.493790	0.493963	0.494132	0.494297	0.494457	0.494614	0.494766	0.494915	0.495060	0.495201
2.6	0.495339	0.495473	0.495603	0.495730	0.495855	0.495975	0.496093	0.496207	0.496319	0.496427
2.7	0.496533	0.496636	0.496736	0.496833	0.496928	0.497020	0.497110	0.497197	0.497282	0.497365
2.8	0.497445	0.497523	0.497599	0.497672	0.497744	0.497813	0.497881	0.497947	0.498011	0.498073
2.9	0.498134	0.498192	0.498249	0.498305	0.498358	0.498411	0.498461	0.498511	0.498558	0.498605
3.0	0.498650	0.498693	0.498736	0.498777	0.498817	0.498855	0.498893	0.498929	0.498965	0.498999
3.1	0.499032	0.499064	0.499095	0.499125	0.499155	0.499183	0.499211	0.499237	0.499263	0.499288
3.2	0.499312	0.499336	0.499359	0.499381	0.499402	0.499422	0.499442	0.499462	0.499480	0.499499
3.3	0.499516	0.499533	0.499549	0.499565	0.499581	0.499595	0.499610	0.499624	0.499637	0.499650
3.4	0.499663	0.499675	0.499686	0.499698	0.499709	0.499719	0.499729	0.499739	0.499749	0.499758
3.5	0.499767	0.499775	0.499784	0.499792	0.499799	0.499807	0.499814	0.499821	0.499828	0.499834
3.6	0.499840	0.499846	0.499852	0.499858	0.499863	0.499868	0.499873	0.499878	0.499883	0.499887
3.7	0.499892	0.499896	0.499900	0.499904	0.499907	0.499911	0.499915	0.499918	0.499921	0.499924
3.8	0.499927	0.499930	0.499933	0.499935	0.499938	0.499940	0.499943	0.499945	0.499947	0.499949
3.9	0.499951	0.499953	0.499955	0.499957	0.499959	0.499960	0.499962	0.499964	0.499965	0.499966
4.0	0.499968	0.499969	0.499970	0.499972	0.499973	0.499974	0.499975	0.499976	0.499977	0.499978