INdAM

Prova scritta per il concorso a 30 borse di studio e 2 borse aggiuntive
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2019/2020.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema nell'apposito foglio.
È ammesso l'uso di riga e compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

Si ricorda che è proibito, a pena di esclusione, scrivere il proprio nominativo o altri segni di riconoscimento nei fogli contenenti il testo o lo svolgimento della prova; il nominativo va riportato esclusivamente nell'apposita busta piccola che dovrà essere sigillata.
Si fa inoltre presente che le domande della prova non sono disposte in ordine di difficoltà.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) Quanti sono i numeri primi p tali che $p+1$ sia il quadrato di un numero intero?

A. 3 B. infiniti C. 1
D. 4 E. nessuno

(2) L'altezza di un triangolo isoscele è pari ai $6/5$ della sua base. Qual è il rapporto tra il raggio del cerchio circoscritto ed il raggio del cerchio inscritto nel triangolo?

A. $135/64$ B. $169/80$ C. $64/25$
D. $65/28$ E. $121/56$

(3) Per preparare una vigna, Domenico sta piantando dei pali alti. Decide di piantarne 49, disposti sui vertici di una griglia quadrata uniforme 6×6 che è fatta da quadrati di lato 1 m. Mentre si accinge a piantare l'ultimo palo in uno dei 4 vertici estremi della griglia, si accorge che da quel punto non tutti gli altri pali sono visibili, poiché alcuni di essi sono nascosti da altri più vicini. Quanti pali riesce a vedere Domenico da quella posizione (immaginando che lo spessore dei pali sia trascurabile)?

A. 31 B. 21 C. 25
D. 49 E. 48

(4) Nadia sta facendo due giri di pista. Durante il primo giro ha mantenuto una velocità costante di 6 km/h. Vorrebbe fare in modo che la sua velocità media complessiva nei due giri sia di 12 km/h.
Per riuscirci, a quale velocità costante dovrà procedere nel secondo giro?

A. 30 km/h B. 18 km/h C. 15 km/h

D. 24 km/h E. non può riuscirci

(5) Preso un numero reale k, indichiamo con $M(k)$ il valore massimo assunto dall'espressione $|4x^2 - 4x + k|$ per $x \in [-1, 1]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, qual è il valore minimo assunto da $M(k)$?

A. $9/2$ B. 4 C. 5

D. $11/2$ E. 8

(6) Considerato un triangolo ABC, sia D un punto interno al lato AB e siano, nell'ordine, A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B sulla retta CD. Si sa che l'area del triangolo ABC è di 24 m^2 e che le misure di AD, BD e CD sono, rispettivamente, 3 m, 9 m e 6 m. Quanti metri misura il segmento $A'B'$?

A. $5\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{5}$ C. 9

D. $35/4$ E. 8

(7) Assegnato un triangolo T, consideriamo i tre quadrati aventi come diagonali i tre lati di T ed indichiamo con T^* l'unione di questi tre quadrati. Esiste qualche triangolo T che non sia interamente contenuto in T^*?

A. Sì: ad esempio se gli angoli di T misurano $172°$, $5°$, $3°$.
B. No: il triangolo T è sempre interamente contenuto in T^*.
C. Sì: ad esempio se gli angoli di T misurano $89°$, $47°$, $44°$.
D. Sì: ad esempio se gli angoli di T misurano $95°$, $44°$, $41°$.
E. Sì: ad esempio se gli angoli di T misurano $95°$, $47°$, $38°$.

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Tracciando 15 circonferenze, il piano può essere suddiviso al massimo in 212 regioni. Tracciando 17 circonferenze, qual è il numero massimo di regioni in cui può essere suddiviso il piano?

(9) Posto $a = 360^3$, trovare il più piccolo intero positivo n tale che a^n sia multiplo di 300^{100}.

(10) Quanti sono i valori $x \in [0, \pi]$ tali che $\cos(2019\,x) = \cos(2020\,x)$?

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, **motivando adeguatamente le risposte**.
Una proposizione contenuta nel testo di un problema, della quale sia richiesta la dimostrazione, può comunque essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta.
Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Consideriamo una successione a_n dove a_1 è un intero positivo e $a_{n+1} = a_n - S(a_n)$ per ogni $n > 0$ (il simbolo $S(m)$ denota, per un numero naturale m, la somma delle cifre di m nella sua scrittura in base 10).

(a) Dimostrare che, comunque sia scelto l'intero positivo a_1, la successione a_n possiede soltanto un numero finito di termini non nulli.

(b) Dimostrare che, se $a_1 > 100$, la successione a_n contiene un termine uguale a 81.

(2) Sono assegnati tre numeri reali a, b, c, tali che $a + b + c = 0$.

(a) Mostrare che $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

(b) Mostrare che $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

(c) Mostrare che $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ca)$.

(d) Supponendo che si abbia $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$ e $abc \neq 0$, calcolare il valore di $a^2 + b^2 + c^2$.

(3) È assegnato un quadrilatero convesso $ABCD$, le cui diagonali AC e BD si intersecano nel punto E e sono tra loro ortogonali. Si indichino, nell'ordine, con a, b, c, d le misure dei lati AB, BC, CD, DA rispettivamente.

(a) Dimostrare che $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

(b) Dimostrare che, se il quadrilatero $ABCD$ è circoscrivibile a una circonferenza, allora esso è simmetrico rispetto a una delle sue diagonali.

(c) Dimostrare che, se il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza, allora il diametro di tale cironferenza è pari a $\sqrt{a^2 + c^2}$.

(d) Dimostrare che, se il quadrilatero $ABCD$ è sia inscrivibile che circoscrivibile a una circonferenza, allora esso possiede due angoli retti.