Istituto Nazionale di Alta Matematica F. SEVERI

Prova scritta del 19 settembre 2014

Concorso a 8 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate
a iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica a.a. 2013-14

Istruzioni per la prova.

- Il tempo a disposizione è di quattro ore.
- E' vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati e chiudere il plico.

  Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

ESERCIZI GRUPPO A

Esercizio A1. Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Si assuma l'esistenza di un numero intero $q > 1$ tale che

$$T^q = Id \quad \text{e} \quad T^j \neq Id \quad \text{per} \quad 0 < j < q\,,$$

dove $T^0 = Id$ e $T^j := T^{j-1} \circ T$.

1. (3 punti) Definire un prodotto scalare definito positivo su V tale che T^h sia un'isometria per ogni $h = 0, \dots, q$.
2. (2 punti) Discutere l'unicità di un tale prodotto scalare nel caso di $n = 2$ e $q = 3$, dimostrandola o esibendo distinti prodotti scalari con la proprietà richiesta.
3. (2 punti) Fissati $n = 4$ e $q = 5$, stabilire se, per $j = 1, 2, 3, 4$, l'endomorfismo T^j è diagonalizzabile. Fornire inoltre un esempio concreto di un tale endomorfismo.
4. (5 punti) Sia $V^{\mathbb{C}}$ la complessificazione di V e sia $T^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di T a $V^{\mathbb{C}}$. Dimostrare per n e q arbitrari che $T^{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile, indicandone tutti i possibili autovalori.

Esercizio A2. Si consideri la forma quadratica

$$q(x,y,z) = 2xy - 2xz + 4yz$$

definita sullo spazio euclideo $\mathbb{E}^3$.

1. (3 punti) Ridurla a forma canonica tramite la scelta di una base ortonormale di $\mathbb{E}^3$.

2. (3 punti) Determinare il massimo e il minimo di q sulla sfera unitaria.

3. (3 punti) Indicata con ρ la forma bilineare simmetrica associata, determinare una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{E}^3$ tale che la matrice $S_{\rho,\mathscr{B}}$, che rappresenta ρ rispetto a $\mathscr{B}$, coincida con una delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. (3 punti) Classificare la quadrica euclidea definita da $\{q(x,y,z) - 2 = 0\}$ e determinarne il rivestimento universale, indicando come realizzare la mappa di rivestimento.

Esercizio A3. Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x]$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$, siano assegnati gli elementi

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4, \qquad g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

e gli ideali

$$I := (x^2 - 4), \qquad J := (x^2 + 3).$$

1. (2 punti) Trovare il massimo comun divisore $d(x)$ tra $f(x)$ e $g(x)$.

2. (5 punti) Stabilire se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/(d(x))$ è isomorfo all'anello $\mathbb{Q}[x]/I$ e/o all'anello $\mathbb{Q}[x]/J$. Giustificare la risposta esibendo, ove possibile, un esplicito isomorfismo.

3. (3 punti) Tra i seguenti elementi
$$\begin{array}{llll} (x+2)+I & \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]/I, & (x+2)+J & \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]/J \\ f(x)+I & \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]/I, & f(x)+(d(x)) & \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]/(d(x)) \end{array}$$
determinare quelli invertibili e calcolarne l'inverso in forma normale.

4. (2 punti) Indicare tutti gli elementi nilpotenti degli anelli $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ e $\mathbb{Q}[x]/(g(x))$.

Esercizio A4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si consideri il luogo dei punti

$$\mathscr{C} := \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \ : \ (3x^2 + 3y^2 - z^2)(z - x^2 - y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

e si definisca $\mathscr{S} := \mathscr{C} \setminus (0,0,0)$.

1. (3 punti) Mostrare che $\mathscr{S}$ è il supporto di una superficie regolarmente immersa, esibendone un atlante.

2. (3 punti) Mostrare che l'insieme $\mathscr{S}_{ell}$ dei punti ellittici di $\mathscr{S}$ è omeomorfo ad ogni singola componente connessa dell'insieme $\mathscr{S}_{par}$ dei punti parabolici, esibendo un esplicito omeomorfismo.

3. (2 punti) Si determini il gruppo fondamentale di $\mathscr{S}_{ell}$ e quello di $\mathscr{S}_{ell} \setminus \{p\}$, dove p è un arbitrario elemento di $\mathscr{S}_{ell}$.

4. (4 punti) Tra i piani paralleli al piano di equazione $y = 0$, determinare tutti quelli la cui intersezione con $\mathscr{S}$ consiste di un'unione di geodetiche. Specificare i criteri usati sia per i piani scelti che per quelli esclusi.

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio B1. Siano $\phi_i \in C^1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, tali che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_i'(x)| \leqslant 1. \tag{0.1}$$

1. (3 punti) Giustificare il fatto che ogni soluzione massimale del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - \phi_1\big(x(t)\big) \\ y'(t) = x(t) - \phi_2\big(y(t)\big) \end{cases} \tag{0.2}$$

   è globale.

2. Supponiamo che in (0.1) una almeno delle due disuguaglianze sia stretta. Provare che:

   (i) (3 punti) (0.2) ha un unico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$;

   (ii) (3 punti) $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di equilibrio instabile.

3. (3 punti) Dire se le proprietà **(i)** e **(ii)** continuano a valere senza l'ipotesi aggiuntiva del punto 2.

Esercizio B2. Siano $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1\,, \quad g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1-n^2}\,, \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

1. (3 punti) Quali sono i possibili valori di $f(\pi)$?

2. (3 punti) Calcolare $f'(0)$ e $g'(0)$.

3. (6 punti) Calcolare le derivate $f^{(k)}(0)$ e $g^{(k)}(0)$, per $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Esercizio B3. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una qualsiasi serie convergente di numeri reali positivi.

1. (3 punti) È necessariamente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^4$?

2. (3 punti) È necessariamente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{1/4}$?

3. (6 punti) È necessariamente convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{n-1}{n}}$?

Esercizio B4. Sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono presi a caso tre punti (indipendentemente e uniformemente) P_1, P_2 e P_3. Tali punti dividono la circonferenza in tre archi.

1. (2 punti) Qual è il valore medio della lunghezza dell'arco contenente il punto $(1, 0)$?

2. (6 punti) Qual è il valore medio della lunghezza dell'arco più corto?

3. (4 punti) Qual è la probabilità che il triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 sia acutangolo?