Istituto Nazionale di Alta Matematica F. Severi

Prova scritta del 26 giugno 2015

Concorso a 8 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate
a iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica a.a. 2014-15

Istruzioni per la prova.

- Il tempo a disposizione è di tre ore e mezzo.
- E' vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande e aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati.

  Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato, pena l'annullamento della prova.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

Esercizi gruppo A

Esercizio A1. Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n tale che

$$T^2 = -Id.$$

Sia $V^{\mathbb{C}}$ la complessificazione di V e $T^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di T a $V^{\mathbb{C}}$.

1. (1 punto) Dato $v \in V \setminus \{0\}$, mostrare che $\{v, T(v)\}$ è una base di un sottospazio T-invariante W di V. Indicare la matrice che rappresenta la restrizione di T a W rispetto a tale base.
2. (3 punti) Mostrare che $T^{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile, che il coniugio $\sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ definito da V scambia gli autospazi di $T^{\mathbb{C}}$ e che n è pari.
3. (4 punti) Esibire una decomposizione di V in sottospazi bidimensionali T-invarianti, motivando la scelta effettuata.
4. (4 punti) Per $n = 4$ e T fissato, sia S un altro endomorfismo di V tale che $S^3 = Id$ e $S \circ T = T \circ S$. Si determinino tutti i possibili ordini dell'endomorfismo $T \circ S$. Per ogni ordine trovato, indicare un esempio di endomorfismo S tale che $T \circ S$ abbia tale ordine.

Esercizio A2. Indichiamo con $\mathbb{Z}$ l'anello dei numeri interi razionali.

1. (2 punti) Mostrare che $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo. Elencare i suoi elementi.
2. (3 punti) Detto $\mathbb{F}_3[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{F}_3$, elencare esplicitamente i polinomi monici irriducibili di grado 2 in $\mathbb{F}_3[X]$, giustificando la loro irriducibilità.
3. (3 punti) Indicato con f uno dei polinomi elencati al punto precedente, mostrare che $K = \mathbb{F}_3[X]/(f)$ è un campo.
4. (4 punti) Siano ora f_1 e f_2 due polinomi irriducibili distinti tra quelli elencati al punto 2, a scelta del candidato, e siano K_1 e K_2 i campi corrispondentemente costruiti come nel punto 3. K_1 e K_2 sono isomorfi? Giustificare la risposta.

Esercizio A3. Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo di vettori colonna, e $w \in \mathbb{R}^n$ abbia lunghezza 1.

1. (4 punti) Dimostrare che la matrice $P = I - 2ww^t$ é ortogonale.
2. (4 punti) Dimostrare che la moltiplicazione per P è una riflessione rispetto al sottospazio $w^\perp$ ortogonale a w, cioé che se un vettore arbitrario $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $v = cw + u$, con $u \in w^\perp$, allora $Pv = -cw + u$
3. (4 punti) Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$ aventi la stessa lunghezza, determinare w tale che $Pu = v$

Esercizio A4. Data una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ positiva e differenziabile, si consideri il luogo dei punti dello spazio eulcideo $\mathbb{E}^3$ definito da

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \, : \, y^2 + z^2 = h(x)^2 \right\}.$$

1. (2 punti) Mostrare che S è il supporto di una superficie regolare e fornire equazioni dei piani tangenti ad S.
2. (3 punti) Calcolare la curvatura Gaussiana in ogni punto di S.
3. (3 punti) Stabilire per quali funzioni h la superficie S è localmente isometrica ad un piano.
4. (4 punti) Determinare i gruppi fondamentali della superficie $S_1 := S \setminus \{(0, 0, h(0)), (0, 0, -h(0))\}$ e della superficie S_2 ottenuta privando un toro di due punti distinti.

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio B1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ definiamo la successione $s_k(1) = 1$, $s_k(2) = \frac{1+2^k}{2^{k+1}}$ ed in generale

$$s_k(n) = \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

1. (4 punti) Calcolare $\lim_{n\to\infty} s_k(n)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
2. (4 punti) Per quali valori di k la successione è convergente?
3. (4 punti) Per quali valori di k vale la disuguaglianza, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$|s_k(n) - s_k(m)| \le \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \ ?$$

Esercizio B2. Dati un numero intero positivo n ed una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisce

$$d_n(f) := \max\{|f(0)|, |f(1)|, |f(2)| \ldots, |f(n)|\}.$$

1. (2 punti) Per $n > 3$, determinare il polinomio p di grado n tale che $p(3) = 1$ e $p(0) = p(1) = p(2) = p(4) = \cdots = p(n) = 0$.
2. (3 punti) Dimostrare che per ogni funzione f il polinomio p di grado minore o uguale a n che coincide con f su $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ha derivata n-esima

$$|p^{(n)}(x)| \le 2^n\, d_n(p).$$

3. (4 punti) Dimostrare che tra i polinomi monici di grado minore o uguale a n esiste un unico polinomio $\hat{p}$ che minimizza d_n.
4. (3 punti) Quante soluzioni reali ha l'equazione $\hat{p}(x) = 0$?

Esercizio B3. Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - y(x), \\ y(0) = k. \end{cases}$$

1. (4 punti) Per quali valori di k esiste una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$?
2. (4 punti) Analizzare i possibili asintoti della soluzione al variare di k.
3. (4 punti) Determinare il luogo dei punti di flesso al variare di k.

Esercizio B4. Sia D il disco unitario con centro in o e siano p e q due punti presi a caso in D, indipendentemente e uniformemente. Indichiamo poi con m il punto medio del segmento pq.

1. (4 punti) Calcolare valore medio e varianza della distanza di p da o.
2. (4 punti) Calcolare valore medio e varianza del quadrato della distanza di p da q.
3. (4 punti) Calcolare valore medio e varianza del quadrato della distanza di m da o.

Soluzioni

Soluzione A1. 1. Poichè T non ammette autovalori reali, v e $T(v)$ sono necessariamente linearmente dipendenti. In tale base la restrizione di T a W è rappresentata da $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Il polinomio minimo $(x^2+1) = (x-i)(x+i)$ di $T^{\mathbb{C}}$ non ha radici multiple, dunque $T^{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile. Essendo $T^{\mathbb{C}}$ l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di T a $V^{\mathbb{C}}$ e σ il coniugio definito da V, è immediato verificare che

$$\sigma \circ T^{\mathbb{C}} = T^{\mathbb{C}} \circ \sigma .$$

Siano $V_{\pm i}$ gli autospazi di $T^{\mathbb{C}}$ rispetto agli autovalori $\pm i$ e sia ad esempio $v \in V_i$. Allora $\sigma \circ T^{\mathbb{C}}(v) = \sigma(iv) = -i\sigma(v)$. Quindi σ scambia V_i con V_{-i}. In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = 2 \dim V_i .$$

3. Scelta una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ di V_i, si può considerare la decomposizione $V = \bigoplus_{j=1}^m W_j$, dove

$$W_j := \mathrm{Span}\big\{ v_j + \sigma(v_j),\ T(v_j + \sigma(v_j)) \big\} .$$

Da verificare che tutti i vettori in gioco sono linearmente indipendenti. Siano allora $x_1, \dots, x_m, , y_1, \dots, y_m$ numeri reali tali che

$$0 = \sum_j x_j \big(v_j + \sigma(v_j)\big) + \sum_j y_j T(v_j + \sigma(v_j)) =$$

$$\sum_j x_j v_j + x_j \sigma(v_j) + \sum_j y_j i v_j - y_j i \sigma(v_j) = \sum_j (x_j + i y_j) v_j + \sum_j (x_j - i y_j) \sigma(v_j) .$$

Essendo $\{v_1, \dots, v_m, \sigma(v_1), \dots, \sigma(v_m)\}$ una base di $V^{\mathbb{C}}$, questo implica che $x_1 = \cdots = x_m = y_1 = \cdots = y_m = 0$, come volevasi verificare.

4. Poichè $S^3 = Id$, l'ordine di S è 1 oppure 3. Nel primo caso $S = Id$ e l'ordine di $T \circ S$ è 4. Nel secondo caso, avendo T ed S ordini differenti, si ha $T \circ S \neq Id$. Anche le potenze $(T \circ S)^2 = -S^2$, $(T \circ S)^3 = -T$, $(T \circ S)^4 = S$ e $(T \circ S)^6 = -Id$ non coincidono con Id. Quindi se l'ordine di S è 3, l'ordine di $T \circ S$ è 12. Come esempio di un tale endomorfismo S, si puo scegliere una rotazione di 60 gradi rispetto alla base del piano W_1 definita nella soluzione del precedente punto da $\big\{ v_1 + \sigma(v_1),\ T(v_1 + \sigma(v_1)) \big\}$.

Si potrebbe anche argomentare come segue. L'ordine di $T \circ S$ divide 12. Anche $S^{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile e, commutando con $T^{\mathbb{C}}$, gli endomorfismi $T^{\mathbb{C}}$ e $S^{\mathbb{C}}$ possono essere diagonalizzati simultaneamente. Sia ω un autovalore di $S^{\mathbb{C}}$, ovvero una radice terza dell'unità. Se r è l'ordine di $T \circ S$, si deve avere $(i\omega)^r = 1$ oppure $(-i\omega)^r = 1$. Questo esclude i casi $r = 1, 2, 3, 6$.

Soluzione A2. 1. Gli elementi di $\mathbb{F}_3$ sono le classi resto degli interi modulo tre: ciascuna di esse è formata da tutti gli interi che hanno lo stesso resto nella divisione per tre. Quindi, usando la notazione standard che indica le classi resto soprasegnando il resto stesso, $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Per vedere che $\mathbb{F}_3$ sia un campo si può fare appello alla teoria degli anelli, osservando che l'ideale generato da 3 è massimale, dato che 3 è primo, ma si può anche osservare che, per il lemma di Bézout, se k è un resto non nullo modulo 3 esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ak + 3b = 1$ e passando ai resti si ha che $\bar{a} = \bar{k}^{-1}$. Ancora piu' semplicemente si può osservare direttamente che gli elementi non nulli di $\mathbb{F}_3$ coincidono con i loro inversi.

2. Tutti i polinomi che si devono elencare hanno la forma $f(X) = X^2 + aX + b$, con $a, b \in \mathbb{F}_3$ (da adesso in poi si omettono le barre sui coefficienti dei polinomi, per alleggerire la notazione). Si può anche assumere $b \neq 0$, altrimenti il polinomio è evidentemente divisibile per X. Quindi ci sono solo sei polinomi da esaminare, e sono: $f_1(X) = X^2 + 1, f_2(X) = X^2 + 2, f_3(X) = X^2 + X + 1, f^4(X) = X^2 + X + 2, f_5(X) = X^2 + 2X + 1, f_6(X) = X^2 + 2X + 2$. Un polinomio di grado 2 (o tre) a coefficienti in un campo K e' irriducibile su K se e solo se non ha radici in K. Sostituendo X con gli elementi di $\mathbb{F}_3$ si vede che f_2, f_3, f_5 sono facilmente riducibili, mentre f_1, f_4, f_6 sono irriducibili.

3. Si può procedere come nel punto 1, applicando adesso all'anello dei polinomi la stessa teoria: siccome f è irriducibile, l'ideale (f) generato da f è massimale, e il corrispondente quoziente è un campo.
Si può procedere anche usando solo l'aritmetica elementare e le congruenze nell'anello dei polinomi: detto r un resto non nullo nella divisione per f, per il Lemma di Bézout esistono polinomi a e b tali che $ar + bf = 1$, e quindi $a \equiv r^{-1}$ modulo f.

4. Si può procedere anche qui in due modi.
Si può osservare che sia K_1 che K_2 sono campi di riducibilità completa del polinomio $g(X) = X^9 - X$, ed anzi ogni loro elemento è radice di g. Siccome il campo di riducibilità completa è unico a meno di isomorfismi si ottiene la tesi.
In alternativa si può costruire esplicitamente un isomorfismo di K_1 in K_2 definendolo attraverso la seguente assegnazione: agli elementi $(f_1), 1 + (f_1), 2 + (f_1)$ di K_1 corrisponderanno rispettivamente gli elementi $(f_2), 1 + (f_2), 2 + (f_2)$ di K_2 (identificando così le due immersioni di $\mathbb{F}_3$ in K_1 e K_2), e a $X + (f_1)$ corrisponderà l'elemento $r(X) + (f_2) \in K_2$, radice del polinomio $f_1(Y) \in K_2[Y]$.

Soluzione A3. 1.Basta verificare che $PP^t = I$, cioè che le righe di P formino una base ortonormale. Se $w = (a_1, a_2, ...a_n)$, si ha che l'elemento di matrice di $I - 2ww^t$ è $\delta_{i,j} - 2a_i a_j$. Il prodotto scalare della k-esima riga e della h-esima riga e' quindi $\Sigma_i(\delta_{k,i} - 2a_k a_i)(\delta_{h,i} - 2a_h a_i) = \delta_{k,h} - 4a_k a_h + \Sigma_i 4a_k a_i a_h a_i = \delta_{k,h}$, ricordando che w ha lunghezza 1.

2. Basta verificare che $Pw = -w$ e che $Pu = u$.

3. L'iperpiano dei punti fissi della riflessione cercata interseca il piano generato dai vettori u e v nella bisettrice dell'angolo formato dai vettori stessi. Quindi il vettore $w = (u - v)/\|u - v\|$, che ha lunghezzza 1 ed è perpendicolare a quella bisettrice è il vettore cercato.

Soluzione A4. 1. La superficie S è implicitamente definita dalla funzione

$$F(x, y, z) := h(x)^2 - y^2 - z^2\,,$$

il cui gradiente è dato da $\nabla F(x, y, z) = 2\big(h(x)h'(x), -y, -z\big)$. Essendo l'intersezione di $\{\nabla F = \overrightarrow{0}\}$ con $\{h = 0\}$ vuota, la superficie è immersa regolarmente. Scelto un punto in S di coordinate $(x_0,\, y_0,\, z_0) = (x_0,\, h(x_0)\cos\theta_0,\, h(x_0)\sin\theta_0)$, un'equazione per il piano tangente a S in $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ è data da

$$h'(x_0)(x - x_0) - \cos\theta_0(y - y_0) - \sin\theta_0(z - z_0) = 0\,.$$

2. Si consideri la parametrizzazione regolare (globale non iniettava) di S definita da

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S \qquad (t, \theta) \to \Big(t,\, h(t)\cos\theta,\, h(t)\sin\theta\Big)\,.$$

Si ha
$$E = 1 + h'(t)^2, \qquad F = 0 \qquad G = h(t)^2,$$
$$N = \frac{\big(h'(t), -\cos\theta, -\sin\theta\big)}{\sqrt{1+h'(t)^2}}$$
$$e = -\frac{h''(t)^2}{\sqrt{1+h'(t)^2}}, \qquad f = 0 \qquad g = \frac{h(t)}{\sqrt{1+h'(t)^2}}.$$
Quindi
$$K = \frac{eg}{EG} = -\frac{h''(t)}{h(t)\big(1+h'(t)^2\big)^2}.$$
3. Dal teorema egregium di Gauss, condizione necessaria affinchè S sia localmente isometrica ad un piano è
$$K = -\frac{h''(t)}{h(t)\big(1+h'(t)^2\big)^2} \equiv 0.$$
Dunque la funzione h è lineare affine. Ricordando che è anche positiva, si deve avere $h(t) \equiv a$, con a costante positiva. Si ottengono quindi dei cilindri definiti da $\{y^2 + z^2 = a^2\}$.

4. La superficie S è omeomorfa al cilindro $\mathbb{R} \times S^1$, e quindi ad un piano privato dell'origine. Dunque S_1 è omeomorfa ad un piano privato di tre punti e il suo gruppo fondamentale è quello libero su tre generatori. Pensiamo al toro T come al cilindro $C = \{(x, y, z) : |z| \le 1, x^2 + y^2 = 1\}$ di altezza finita con le due circoferenze $\partial C_1 = C \cap \{z = 1\}$ e $\partial C_{-1} = C \cap \{z = -1\}$ al bordo superiore ed inferiore identificate. Privando C dei punti $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$, possiamo contrarre tutto sull'unione dei due segmenti $C \cap \{x = 0\}$ con il bordo $\partial C_1 \cup \partial C_{-1}$ di C. Tenendo conto dell'identificazione di ∂C_1 con ∂C_{-1}, si tratta di tre circonferenze tangenti, omotopicamente equivalenti ad un bouquet di tre circonferenze. Quindi i gruppi fondamentali di S_1 ed S_2 coincidono. Questo fatto, come noto, non implica che S_1 ed S_2 siano omeomorfe.

Soluzione B1.
1. Osserviamo la relazione che intercorre tra la successione in esame ed il calcolo di
$$\int_0^1 x^k \, dx.$$
Dividendo l'intervallo in n parti uguali e scegliendo l'estremo destro di ogni intervallo come punto su cui valutare la funzione otteniamo la somma (a volte detta somma destra di Riemann)
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{j}{n}\Big)^k = s_k(n).$$
Siccome la funzione x^k è monotona (crescente se $k > 0$, decrescente se $k < 0$ e costante se $k = 0$) ed è limitata in $[0,1]$ se $k \ge 0$, ne deduciamo che per ogni $k \ge 0$ la funzione x^k è integrabile secondo Riemann e
$$\lim_{n\to\infty} s_k(n) = \int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}.$$

2. Per i valori di k negativi, la funzione x^k non è limitata in 0 e dobbiamo ricorrere all'integrale generalizzato di Riemann $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^k\,dx$. Sappiamo che tale integrale esiste solo se $k>-1$ e quindi anche la successione $s_k(n)$ convergerà solo se $k>-1$.
3. Se valesse la disuguaglianza, allora la successione sarebbe convergente e quindi può valere solo per $k>-1$.
Per $k\geq 0$ la funzione x^k è non decrescente e quindi $s_k(n)$ è sempre maggiore di $1/(k+1)$. Inoltre, considerando le somme sinistre di Riemann, vale

$$s_k(n)-\frac{1}{n}\leq\int_0^1 x^k\,dx\leq s_k(n)$$

da cui ricaviamo facilmente la disuguaglianza richiesta.
Se $k\in(-1,0)$ allora verifichiamo che la disuguaglianza non vale, facendo vedere che esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $s_k(n)<\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n}$. A quel punto, a costo di prendere m molto grande, e quindi molto vicino a $1/(k+1)$, è semplice concludere. Notiamo che la funzione x^k è decrescente e quindi la somma destra di Riemann è sempre minore dell'integrale di x^k tra 0 e 1 ed anzi possiamo dire che

$$s_k(n)<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n^{k+1}}-\int_0^{1/n}x^k\,dx=\frac{1}{k+1}+\frac{k}{k+1}\,\frac{1}{n^{k+1}}.$$

Pertanto è sufficiente scegliere n tale che

$$\frac{k}{k+1}\,\frac{1}{n^{k+1}}\leq-\frac{1}{n}$$

o equivalentemente

$$n^k\leq\frac{-k}{k+1}.$$

Soluzione B2.
1. Il polinomio cercato ha equazione

$$p(x)=\prod_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\neq 3}}\frac{x-k}{3-k}.$$

2. Il polinomio p è chiaramente unico, dato che la differenza tra due polinomi che coincidono con f su $\{0,1,2,\dots,n\}$ sarebbe un polinomio di grado minore o uguale a n con $n+1$ radici distinte.
Inoltre, generalizzando la scrittura al punto precedente, osserviamo che deve valere

$$\begin{aligned}p(x)\quad=\quad & f(0)\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{(0-1)(0-2)\dots(0-n)}+\\ & +f(1)\frac{(x-0)(x-2)\dots(x-n)}{(1-0)(1-2)\dots(1-n)}+\dots\\ & +f(n)\frac{(x-0)(x-1)\dots(x-n+1)}{(n-0)(n-1)\dots(1)}.\end{aligned}$$

La stima sulla derivata n-esima segue da un'opportuna maggiorazione del coefficiente a_n di x^n in $p(x)$. In particolare possiamo scrivere

$$|a_n|=\left|\sum_{k=0}^n\frac{f(k)}{(-1)^{n-k}k!(n-k)!}\right|\leq\sum_{k=0}^n\frac{|f(k)|}{n!}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\leq 2^n\,\frac{d_n(p)}{n!}.$$

3. Per i polinomi monici ($a_n = 1$) la stima precedente si traduce in

$$d_n(p) \geq \frac{n!}{2^n}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $(-1)^{n-k} p(k) = d_n(p) = \frac{n!}{2^n}$, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$. Quindi il minimo di $d_n(p)$ esiste ed è assunto sul polinomio $\hat{p}$ definito da

$$\hat{p}(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(x-k)}.$$

4. Da quanto visto segue che $\hat{p}$ assume valori discordi agli estremi degli intervalli $[k-1, k]$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. Quindi in ognuno di tali intervalli ammette una radice.

Soluzione B3.
1. Per ogni valore di k il problema in questione verifica le condizioni del teorema di esistenza e unicità di una soluzione locale. Inoltre è semplice verificare che esistono due soluzioni globali costanti $y = 0$ e $y = 1$. Pertanto per $0 \leq k \leq 1$ la soluzione è limitata e quindi verifica anche le ipotesi del teorema di esistenza di una soluzione globale.
Per valori diversi di k non esiste una soluzione globale. Per convincersene è sufficiente integrare l'equazione e, sfruttando $y^2 - y > 0$, trovare

$$x + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(\frac{y-1}{y}\right),$$

da cui ricaviamo

$$y(x) = \frac{k}{k-(k-1)e^x},$$

che ha un asintoto verticale in $x = \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.
2. Dall'equazione ricaviamo che y' è negativa soltanto nella striscia di piano T compresa tra le rette $y = 0$ e $y = 1$, che rappresentano i grafici di due soluzioni particolari.
Ne segue che per ogni $k > 1$ la soluzione è strettamente crescente ed ha asintoto orizzontale $y = 1$ a sinistra, dato che nessun altro valore del limite verificherebbe l'equazione di partenza e, come già visto, asintoto verticale $x = \ln k - \ln(k-1)$.
Per $0 < k < 1$, ogni soluzione è strettamente decrescente e deve avere asintoto orizzontale $y = 0$. Se avesse asintoto orizzontale $y = \varepsilon$, dovrebbe valere $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$ contro l'equazione di partenza.
Per $k < 0$, ragionando come sopra si dimostra che $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ e che la soluzione ha asintoto verticale $x = \ln|k| - \ln|k-1|$, che si trova a sinistra dell'asse delle ordinate.
3. Derivando l'equazione di partenza otteniamo

$$y''(x) = (2y(x) - 1)y'(x).$$

Ne segue che la derivata seconda si annulla soltanto per $y = 1/2$ o dove si annulla la derivata prima (cioè sulle due soluzioni particolari $y = 0$ e $y = 1$). Dal punto precedente abbiamo visto che le soluzioni per $0 < k < 1$ attraversano $y = 1/2$, e quindi lì hanno un punto di flesso. Siccome l'equazione di partenza non dipende da x, ogni soluzione $y(x)$ genera infinite altre soluzioni per traslazione $y(x+h)$. Quindi il luogo dei punti di flesso è $y = 1/2$.

Soluzione B4.
1. Utilizzando le coordinate polari otteniamo

$$E(po) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, dr\, d\theta = \frac{2}{3},$$

$$E(po^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che la varianza di po è $\frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.
2. Per il teorema di Carnot, $pq^2 = po^2 + qo^2 - 2po\, qo\cos(p\hat{o}q)$. L'angolo $p\hat{o}q$ ha una distribuzione di probabilità uniforme su $[0, 2\pi]$ ed è indipendente dalle variabili po e qo. Quindi possiamo scrivere

$$E(pq^2) = E(po^2) + E(qo^2) - 2E(po)E(qo)E(\cos(p\hat{o}q)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{2}{3}0 = 1.$$

Per calcolare la varianza possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Var(pq^2) \quad &= E(pq^4) - 1 = E(po^4) + E(qo^4) + 4E(po^2)E(qo^2)E(\cos^2(p\hat{o}q)) + 2E(po^2)E(qo^2) \\ &-4E(po^3)E(qo)E(\cos(p\hat{o}q)) - 4E(po)E(qo^3)E(\cos(p\hat{o}q)) - 1 \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + 4\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} - 0 - 0 - 1 = \tfrac{2}{3}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $E(\cos^2(p\hat{o}q)) = \frac{1}{2\pi}\cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}$ e $E(po^4) = \frac{1}{3}$ che si ricava come sopra.
3. Osservando che mo è la metà della diagonale per o del parallelogramma con vertici p, o, q, $p+q$ (quest'ultima somma è intesa tra vettori), risulta

$$4\, mo^2 = po^2 + qo^2 + 2po\, qo\cos(p\hat{o}q).$$

Come sopra abbiamo dunque

$$4E(mo^2) = E(po^2) + E(qo^2) + 2E(po)E(qo)E(\cos(p\hat{o}q)) = 1$$

e

$$\begin{aligned} Var(mo^2) \quad &= E(mo^4) - E(mo^2)^2 = E(po^4) + E(qo^4) + 4E(po^2)E(qo^2)E(\cos^2(p\hat{o}q)) \\ &+2E(po^2)E(qo^2) + 4E(po^3 qo)E(\cos(p\hat{o}q)) + 4E(po\, qo^3)E(\cos(p\hat{o}q)) - \tfrac{1}{16} \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + 4\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} + 0 + 0 - \tfrac{1}{16} = \tfrac{77}{48}, \end{aligned}$$