Istituto Nazionale di Alta Matematica F. SEVERI

Prova scritta del 20 maggio 2013

Concorso a 7 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate
a iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica a.a. 2012-13

Istruzioni per la prova.

- Il tempo a disposizione è di $3,5$ ore.
- E' vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati e chiudere il plico.

  Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

ESERCIZI GRUPPO A

Esercizio A1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano W e W' due sottospazi vettoriali di V tali che $V = W \bigoplus W'$. Sia ϕ un endomorfismo lineare di V tale che $\phi(W) \subseteq W$ e $\phi(W') \subseteq W'$.
i. (4 punti) Dato un autovettore v di ϕ relativo all'autovalore λ, $v = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W'$, calcolare $\phi(w)$ e $\phi(w')$.
ii. (8 punti) Dimostrare che ϕ è diagonalizzabile se e solo se le restrizioni di ϕ a W e a W' lo sono.

Esercizio A2. Sia F un campo di caratteristica $p \neq 0$.
i. (3 punti) Dimostrare che $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$, per ogni $a, b \in F$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.
ii. (4 punti) Data un'estensione E di F, sia $K = \{a \in E \mid a^{p^n} \in F$ per qualche $n \in \mathbb{N}\}$. Dimostrare che K è un sottocampo di E.
iii. (5 punti) Dimostrare che un automorfismo di E che fissa ogni elemento di F lascia fisso anche ogni elemento di K.

Esercizio A3. Fissati $a, b \in \mathbb{Z}$, poniamo $S_{a,b} := \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
i. (4 punti) Dimostrare che gli insiemi ottenuti facendo tutte le possibili unioni (anche vuote) di insiemi del tipo $S_{a,b}$ definiscono una topologia su $\mathbb{Z}$.
ii. (4 punti) Dimostrare che $S_{a,b}$ è sia un aperto che un chiuso, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, e che ogni aperto non vuoto ha cardinalità infinita.

iii. (4 punti) Dimostrare che $\cup S_{p,0} = \mathbb{Z} \setminus \{1,-1\}$, dove la somma è su tutti i numeri primi p, e dedurne l'infinità dei numeri primi (dimostrazione dovuta a Hillel Furstenberg).

Esercizio A4. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ che soddisfa un polinomio p a coefficienti in $\mathbb{C}$ senza radici multiple.
i. (3 punti) Dimostrare che p e la sua derivata p' sono coprimi.
ii. (4 punti) Dimostrare che $p'(A)$ è una matrice invertibile.
iii. (5 punti) Dimostrare che ogni vettore $v \in \mathbb{C}^n$ è somma di autovettori di A e quindi A è diagonalizzabile.

Esercizio A5. Sia $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ la curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin^3 t)$.
i. (4 punti) Studiare la periodicità e la regolarità di α e dire se gli assi coordinati sono assi di simmetria della curva.
ii. (4 punti) Calcolare il raggio del cerchio osculatore in ogni punto in cui esiste.
iii. (4 punti) Sia S la superficie ottenuta immergendo l'immagine di α nel piano $z = 0$ di $\mathbb{R}^3$ e ruotandola intorno all'asse y. Determinare una parametrizzazione e un'equazione $f(x, y, z) = 0$ per S.

Esercizio A6. Sia G un gruppo finito di ordine $2m$, con m dispari. Denotiamo con $S(G)$ il gruppo simmetrico sull'insieme G e consideriamo l'immersione di Cayley $\tau : G \mapsto S(G)$.
i. (4 punti) Dimostrare che esiste $g \in G$ tale che $\tau(g)$ è prodotto di m trasposizioni.
ii. (4 punti) Dimostrare che esiste un sottogruppo H di G di indice 2.
iii. (4 punti) Usando il fatto che tutti i gruppi finiti di ordine dispari sono risolubili (Teorema di Feit-Thompson), dimostrare che G è risolubile.

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio B1.
Sia P un quadrilatero contenuto in un quadrato di lato 4 m ed avente area di 15 m^2.
i. (4 punti) Trovare il valore minimo del perimetro di P.
ii. (8 punti) Trovare il valore massimo del perimetro di P.

Esercizio B2.
(5 punti) Dato $a > 0$, consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_0 = c\,, \quad x_{k+1} = \frac{2}{3}\left(x_k + \frac{a}{x_k^2}\right), \quad k = 0, 1, \dots .$$

Trovare il limite della successione al variare del valore iniziale $c \neq 0$ e dimostrare la convergenza.

Esercizio B3.
Indicare per quali valori di p e q reali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(x^q) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

è
i. (3 punti) continua in $[-1, 1]$,

ii. (3 punti) lipschitziana in $[-1,1]$,
iii. (5 punti) a variazione limitata in $[-1,1]$,
iv. (5 punti) assolutamente continua in $[-1,1]$.

Esercizio B4.
(8 punti) Trovare il massimo della funzione $f(x)$ definita in $[0,1]$ da

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{t^6+(1-x)^2(x-t)^2}\,dt\,.$$

Esercizio B5.
Sia f una funzione definita in $[0,\infty)$, con derivata in ogni punto, e soddisfacente

$$f'(x)=2f(2x)-f(x)\,,\ \forall x>0\,,$$

$$M_n=\int_0^\infty x^n f(x)\,dx<\infty\,,\ \forall n\in I\!N\,.$$

i. (8 punti) Dimostrare che esiste una funzione non nulla che verifica le ipotesi.
ii. (6 punti) Per quali successioni di numeri reali $\{a_n\}$ può valere $M_n=a_n$, per ogni $n\in I\!N$?

Esercizio B6.
Sia D il disco unitario con centro in o. Siano p e v due punti presi a caso su ∂D, indipendentemente e uniformemente. Sia poi q un punto preso a caso in D (indipendentemente da p e v ed uniformemente sul disco). Costruiamo il triangolo rettangolo T con i cateti paralleli o perpendicolari alla direzione ov ed avente ipotenusa po ed il rettangolo R con i lati paralleli o perpendicolari alla direzione ov ed avente diagonale pq.
i. (3 punti) Calcolare valor medio e varianza dell'area di T.
ii. (3 punti) Calcolare la probabilità che q appartenga a T.
iii. (5 punti) Calcolare la probabilità che R sia contenuto in D.
iv. (6 punti) Calcolare valor medio e varianza dell'area di R.