Concorso a n.8 borse per l'avviamento alla ricerca riservate ad iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica, a.a. 2016-17

Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"

SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA DEL 14 OTTOBRE 2016

Esponiamo qui sotto le soluzioni dei problemi proposti. Naturalmente, altre soluzioni sono possibili e tutte, purché corrette, sono state ritenute valide.

SVOLGIMENTO GRUPPO A

Esercizio A1. Partendo dal risultato (noto) che le successioni $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\cos n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono dense in $[-1,1]$, dimostrare che:

(1) $\{\sin(2n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (e $\{\cos(2n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$) sono dense in $[-1,1]$;

(2) la successione $\{\cos n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite per $n\to\infty$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che dal risultato citato segue che la successione $\{(\cos n, \sin n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è densa sulla circonferenza unitaria S^1.

(1) Consideriamo $\{\sin(2n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$\sin(2n+1) = 2\alpha \sin n \cos n + \beta(1-2\sin^2 n)$$

dove $\alpha = \cos 1$, $\beta = \sin 1 > 0$. Sia $x \in [-1,1]$ e n_k tale che

$$(\sin n_k, \cos n_k) \to (x, \sqrt{1-x^2}).$$

Posto

$$f(x) = 2\alpha x\sqrt{1-x^2} + \beta(1-2x^2)$$

sarà $\sin(2n_k+1) \to f(x)$. Pertanto $f([-1,1]) \subset \overline{\{\sin(2n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}}$. D'altro canto f è continua e $\pm 1 \in f([-1,1])$ in quanto, ad esempio,

$$f\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{2}}\right) = 1 \quad \text{e} \quad f\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}}\right) = -1$$

Ne segue che $[-1,1] \subset f([-1,1])$ e la tesi è provata.

(2) Supponiamo per assurdo che $\cos n^2 \to L$ e, fissato $x \in [-1,1[$, sia

$$\cos(2n_k+1) \to x.$$

Allora

$$\cos(n_k+1)^2 = \cos n_k^2 \cos(2n_k+1) - \sin n_k^2 \sin(2n_k+1)$$

da cui

$$|L|(1-x) = \sqrt{(1-L^2)(1-x^2)}.$$

Ne segue che $L^2 = (1+x)/2$, in contrasto con l'unicità del limite.

□

Esercizio A2. Dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,dx \le 4\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx$$

per ogni $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tale che $f(0) = 0$.

Dimostrazione. Osservato che $x \mapsto f(x)/x$ si prolunga con continuità su $[0,1]$, risulta

$$0 \le \int_0^1 \Big(2f'(x) - \frac{f(x)}{x}\Big)^2 dx = \int_0^1 \Big(4|f'(x)|^2 - 4\,\frac{f(x)f'(x)}{x} + \frac{|f(x)|^2}{x^2}\Big)dx.$$

Quindi, integrando per parti,

$$0 \le \int_0^1 \Big(4|f'(x)|^2 - \frac{|f(x)|^2}{x^2}\Big)dx - 2|f(1)|^2$$

da cui segue la tesi. □

Esercizio A3. Dato $\alpha \in [0,1]$, si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x(t) \\ \dot{y}(t) = \alpha \sin x(t) - y(t) \end{cases} \qquad (S)$$

(1) Risolvere (S) per $\alpha = 0$.
(2) Provare che, per ogni $\alpha \in [0,1]$, l'origine $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (o di equilibrio) per il sistema (S).
(3) Studiare la stabilità di $(0,0)$ al variare di α in $[0,1]$.

Dimostrazione. (1) $x(t) = (a+bt)e^{-t}$, $y(t) = be^{-t}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(2) Per $\alpha \in]0,1]$ si ha che

$$\begin{cases} 0 = y - x \\ 0 = \alpha \sin x - y \end{cases}$$

ammette la sola soluzione $x = 0 = y$. Infatti, per $x \neq 0$ si ha che

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\alpha}\,.$$

Per $\alpha = 0$ otteniamo immediatamente $x = 0 = y$.

(3) Per $\alpha \in [0,1[$ possiamo studiare la linearizzazione di (S) in $(0,0)$. Posto

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y - x \\ \alpha \sin x - y \end{pmatrix}$$

si ha

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori negativi. Pertanto $(0,0)$ è asintoticamente stabile.

Per $\alpha = 1$, poniamo $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Allora

$$\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = -(x^2 + y^2) + xy + y \sin x \leq -(x^2 + y^2) + 2|x|\,|y| \leq 0$$

Pertanto V è una funzione di Liapunov per $(0,0)$ che risulta quindi stabile.

□

Esercizio A4. Data $f \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$, poniamo

$$N = \big\{x \in]a,b[\, : f'(x) = 0\big\}.$$

Dimostrare che $f(N)$ ha misura nulla (secondo Lebesgue).

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto $-\infty < a < b < +\infty$. Fissato $\epsilon > 0$ sia

$$A_\epsilon = \{x \in]a,b[\, : \ |f'(x)| < \epsilon\}.$$

Poichè A_ϵ è aperto in $]a,b[$ esisteranno intervalli aperti disgiunti $\{I_n^\epsilon\}$ tali che

$$A_\epsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\epsilon.$$

Per ogni $x, y \in I_n^\epsilon$ si ha $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon |y - x|$. Pertanto

$$|f(N)| \leq \left| f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\epsilon\Big)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n^\epsilon)| \leq \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^\epsilon| \leq \epsilon(b - a).$$

Ne segue che $|f(N)| = 0$. Se poi $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ si ragiona per approssimazione. □

Esercizio A5. Due amici si danno appuntamento in un bar tra le 10 e le 11 con l'accordo che ciascuno dei due, non trovando l'amico al proprio arrivo, attende 10 minuti e poi va via. Calcolare la probabilità che i due amici si incontrino.

Dimostrazione. Rappresentando le coppie dei tempi di arrivo dei due amici come punti $(x,y) \in [0,1]^2$, si ha che la probabilità che i due amici si incontrino è data da

$$\left|\left\{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ |x - y| \leq \frac{1}{6}\right\}\right| = \frac{11}{36}.$$

□

SVOLGIMENTO GRUPPO B

Esercizio B1. Sia B un anello.

(i) **(6 punti)** Supponendo che si abbia $b^2 = b$, per ogni $b \in B$, mostrare che B e' commutativo.

(ii) **(1 punto)** Supponiamo invece che si abbia $b^3 = b$, per ogni $b \in B$. Mostrare che se $x, y \in B$ allora $xy = 0$ se e solo se $yx = 0$.

(iii) **(3 punti)** Ipotesi come in (ii). Sia $c \in B$ tale che $c = c^2$. Utilizzare (ii) per mostrare che c e' *centrale*, cioe' che per ogni $x \in B$ si ha $cx = xc$.

(iv) **(1 punto)** Ipotesi come in (ii). Sia $b \in B$. Utilizzare (iii) per mostrare che b^2 e' centrale.

(v) **(3 punti)** Ipotesi come in (ii). Sia $b \in B$. Mostrare che $b + b^2 = (b + b^2)^3 = (b + b^2)^2 + (b + b^2)^2$, e concludere quindi, usando (iv), che b e' centrale, e che dunque B e' commutativo.

Svolgimento (i) Per ogni $b \in B$ si ha $b+b = (b+b)^2 = b^2+b^2+b^2+b^2 = b+b+b+b$, donde, cancellando, $b + b = 0$ e B ha caratteristica 2. Se ora $x, y \in B$ si ha $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$, donde, cancellando, $0 = xy + yx$, e dato che la caratteristica di B e' 2, si ottiene $xy = yx$.

(ii) $xy = (xy)^3 = x(yx)(yx)y = x00y = 0$.

(iii) $0 = cx - c^2x = c(x - cx) = (x - cx)c = xc - cxc$, donde $xc = cxc$. Similmente $0 = xc - xc^2 = (x - xc)c = c(x - xc) = cx - cxc$, donde $cx = cxc$. Confrontando, $xc = cx$.

(iv) $b^2 = b(b^3) = (b^2)^2$.

(v) $b+b^2 = (b+b^2)^3 = (b+b^2)^2(b+b^2) = (b+b^2+b+b^2)(b+b^2) = (b+b^2)^2+(b+b^2)^2$, da cui $b = (b + b^2)^2 + (b + b^2)^2 - b^2$, e per (iv) b e' centrale.

Esercizio B2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale con $e = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ la sua base canonica. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$F(\mathbf{e}_1) = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3,\ F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2,\ F(\mathbf{e}_3) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3.$$

(i) **(2 punti)** Stabilire se l'endomorfismo F e' triangolabile su $\mathbb{R}$.

(ii) **(3 punti)** Stabilire se il polinomio minimo $m_F(x) \in \mathbb{R}[x]$ ed il polinomio caratteristico $p_F(x) \in \mathbb{R}[x]$ dell'endomorfismo F coincidono (a meno del segno).

(iii) **(3 punti)** Verificare che, a meno dell'ordine dei blocchi, la forma canonica di Jordan di F e'

$$\begin{pmatrix} J_2 & O_{2,1} \\ O_{1,2} & J_1 \end{pmatrix},$$

dove J_2 e' un blocco di Jordan 2×2, J_1 e' un blocco di Jordan 1×1, $O_{2,1}$ e' la matrice colonna $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $O_{1,2}$ e' la matrice riga $(0 \ \ 0)$.

(iv) **(4 punti)** Notazione come in (iii). Siano

$$A = \begin{pmatrix} J_2 & O_{2,1} \\ O_{1,2} & J_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} J_1 & O_{1,2} \\ O_{2,1} & J_2 \end{pmatrix}.$$

Determinare il sottogruppo $H \leq GL(3, \mathbb{R})$ generato dagli elementi A e B.

Svolgimento (i) La matrice rappresentativa in base e di F e' la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che $tr(A) = 3$, $det(A) = 1$ mentre la somma dei minori principali e' $\sigma = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 3$. Pertanto il polinomio caratteristico di F e'

$$p_F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x-1)^3.$$

Poiche' lo spettro di F e' $\{1\} \subset \mathbb{R}$, F e' triangolabile su $\mathbb{R}$.

(ii) Per definizione di polinomio minimo, $m_F(x) \in \mathbb{R}[x]$ e' un polinomio monico, non costante ed e' un divisore di $p_F(x)$. Pertanto $m_F(x)$ e' della forma $(x-1)^n$, con $1 \leq n \leq 3$. Denotata con I la matrice identita', notiamo che

$$A - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

non e' la matrice nulla, quindi $n > 1$. Visto che $(A - I)^2 = O$, dove O denota la matrice nulla 3×3, si deduce che $m_F(x) = (x-1)^2$ e che quindi $m_F(x)$ e' un divisore proprio di $p_F(x)$ in $\mathbb{R}[x]$.

(iii) Visto che $rg(A - I) = 1$, l'autospazio $Ker(A - I)$ relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Quindi F ha due blocchi di Jordan, necessariamente uno dei quali di ordine il grado del polinomio minimo $m_F(x)$. A meno dell'ordine dei blocchi di Jordan, la forma canonica di Jordan di F e' pertanto come descritta nel testo dell'esercizio.

(iv) Si verifica direttamente che l'insieme delle matrici unitriangolari superiori

$$u(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ forma un sottogruppo U di $GL(3, \mathbb{Z}) \subset GL(3, \mathbb{R})$, e quindi $H \leq U$. D'altra parte definita $C := A^{-1}B^{-1}AB$ si ha $B^b A^a C^c = u(a, b, c)$.

Esercizio B3. Si consideri $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ il piano affine reale, con riferimento affine $RA(O;x,y)$. Sia data $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la curva piana di equazione cartesiana

$$f(x,y) = y^3 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

(i) **(2 punti)** Determinare i punti singolari di C e le equazione delle tangenti principali nei punti singolari.

(ii) **(4 punti)** Determinare una parametrizzazione razionale di C e studiare iniettivita' e regolarita' della parametrizzazione determinata.

(iii) **(4 punti)** Considerando l'inclusione naturale

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \ \ (x,y) \to [1,x,y],$$

dove $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale, verificare che C e' non-singolare nei suoi punti impropri.

(iv) **(2 punti)** Verificare che C possiede un unico punto di flesso all'infinito e si calcoli l'equazione cartesiana omogenea della retta (proiettiva) tangente inflessionale.

Svolgimento (i) Considerando

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(-2x-2, \ 3y^2+2y\right) = (0,0)$$

si ottengono i punti $P = (-1,0)$ e $Q = (-1,-\frac{2}{3})$, il secondo dei quali non appartiene a C. Pertanto C e' singolare esclusivamente in P.

L'equazione complessiva delle tangenti principali nel punto singolare P e':

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \ \ (x+1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(P) \ \ (x+1)y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f(P) \ \ y^2 = 0,$$

i.e.

$$-2(x+1)^2 + 2y^2 = 0.$$

Pertanto le tangenti principali a C in P sono le due rette

$$y = \pm(x+1)$$

e P e' dunque un punto doppio ordinario equivalentemente *nodale* per C.

(ii) Consideriamo il fascio di rette

$$\{y = t(x+1)\}_{t\in\mathbb{R}},$$

di centro il punto P. Il sistema di intersezione di C con la retta $r_t : y = t(x+1)$, $t \in \mathbb{R}$ parametro, e' dato da

$$\begin{cases} (x+1)^2(t^3(x+1) + (t^2-1)) & = & 0 \\ y - t(x+1) & = & 0 \end{cases}$$

Per $t \neq \pm 1$ la retta r_t ha, fuori del punto P, intersezione con la curva C il punto $Q_t = \left(\frac{1-t^2-t^3}{t^3}, \frac{1-t^2}{t^2}\right)$ ed ivi l'intersezione e' semplice. Invece per $t = \pm 1$, che corrispondono ad i coefficienti angolari delle due tangenti principali a C in P, le rette $r_{\pm 1}$ hanno intersezione con C esclusivamente in P. Ciascuna di queste due rette ha ivi molteplicita' di intersezione 3.

La precedente analisi fornisce una parametrizzazione razionale di C, definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, data da:

$$\underline{\alpha}(t) = (x(t),\ \ y(t)) := \left(\frac{1-t^2-t^3}{t^3},\ \ \frac{1-t^2}{t^2}\right).$$

La parametrizzazione $\underline{\alpha}(t)$, laddove definita, non e' iniettiva (visto che $\underline{\alpha}(1) = \underline{\alpha}(-1)$) ma e' regolare (visto che $\underline{\alpha}'(t) = (x'(t),\ \ y'(t)) = \left(\frac{t^2-3}{t^4},\ \ \frac{-2}{t^3}\right) \neq (0,0)$ per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

(iii) Denotiamo con $\overline{C}$ il completamento proiettivo di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e poniamo $[x_0, x_1, x_2]$ coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Abbiamo allora che l'equazione omogenea che definisce $\overline{C}$ e'

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_2^3 - x_0 x_1^2 + x_0 x_2^2 - 2x_0^2 x_1 - x_0^3 = 0.$$

I punti impropri di $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono determinati dall'intersezione di $\overline{C}$ con la retta di equazione $x_0 = 0$, che e' esclusivamente il punto $H := [0, 1, 0]$. Le derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$ valutate in H, forniscono la terna $(-1, 0, 0)$, pertanto H e' non–singolare per $\overline{C}$.

(iv) La retta $x_0 = 0$ ha molteplicita' di intersezione 3 con $\overline{C}$ in H, che e' non–singolare per $\overline{C}$. Ne segue che $x_0 = 0$ e' ivi tangente a $\overline{C}$, che H e' punto di flesso per $\overline{C}$ e che la tangente inflessionale e' proprio $x_0 = 0$. Con procedimento alternativo, si puo' arrivare alla medesima conclusione determinando l'equazione della curva nella carta affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dove $x_1 \neq 0$.

Esercizio B4. Sia data la parametrizzazione

$$\begin{array}{rccc} \underline{x}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longrightarrow & (u,\ v,\ uv). \end{array}$$

(i) **(2 punti)** Stabilire se $\underline{x}(u,v)$ e' una parametrizzazione regolare, iniettiva e determinare l'equazione cartesiana della superficie immagine $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) **(3 punti)** Classificare i punti di Σ.

(iii) **(4 punti)** Preso $P = (1,1,1) \in \Sigma$, determinare curvature principali, tangenti principali e tangenti asintotiche di Σ in P.

(iv) **(3 punti)** Determinare le linee asintotiche di Σ e calcolare il vettore curvatura in ciascun punto di esse.

Svolgimento (i) La parametrizzazione e' banalmente iniettiva. Notiamo inoltre che $\underline{x}_u = (1, 0, v)$ e $\underline{x}_v = (0, 1, u)$ pertanto la parametrizzazione e' anche regolare. L'equazione cartesiana di Σ e' data da $z = xy$; pertanto Σ e' un paraboloide iperbolico (od a sella).
(ii) Proprio perche' Σ e' un paraboloide iperbolico, tutti i suoi punti sono iperbolici. Alternativamente, con conti espliciti otteniamo che i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale sono

$$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1 + v^2, \; F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = uv, \; G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = 1 + u^2,$$

i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale sono

$$L = 0, \; M = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \; N = 0$$

quindi la curvatura Gaussiana in ogni punto e'

$$K(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} < 0, \;\; \forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(iii) Il punto P corrisponde a $(u, v) = (1, 1)$. Pertanto la curvatura Gaussiana in P e' $K(P) = -\frac{1}{9}$ mentre la curvatura media e' $H(P) = \frac{1}{2}\frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$. Le curvature principali in P sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{1}{9} = 0,$$

i.e. la curvatura minima e' $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e la curvatura massima e' $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

La matrice rappresentativa dell'operatore forma (o di Weingarten) nella base $\{\underline{x}_u, \; \underline{x}_v\}$, per $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ arbitrari, e':

$$A(u, v) := \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Valutando $A(u, v)$ nel punto P, i.e. per $(u, v) = (1, 1)$, si ottiene

$$A(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ \frac{2\sqrt{3}}{9} & -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}.$$

La direzione principale relativa a $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e' data da un qualsiasi autovettore di $A(1, 1)$ relativo all'autovalore $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, che risulta e.g. $(u, v) = (1, -1)$. Questo autovettore corrisponde al vettore

$$\mathbf{v}_1 = 1(1, 0, 1) - 1(0, 1, 1) = (1, -1, 0) \in T_P(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3.$$

Dal teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, la direzione principale relativa a $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$ corrisponde a $(u, v) = (1, 1)$, cioe' al vettore

$$\mathbf{v}_2 = 1(1, 0, 1) + 1(0, 1, 1) = (1, 1, 2) \in T_P(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3.$$

Le relative rette tangenti principali in $P = (1,1,1)$ sono quindi le rette

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,-1,0) \;\text{ i.e. }\; z-1 = 0 = x+y-2$$

e

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,1,2) \;\text{ i.e. }\; 2x-z-1 = 0 = x-y.$$

Le direzioni asintotiche in P sono date invece dalle direzioni che annullano la seconda forma quadratica fondamentale in P, i.e. sono le direzioni che annullano

$$\frac{2}{\sqrt{3}}uv.$$

Le direzioni asintotiche sono quindi le direzioni delle linee coordinate di Σ e le relative tangenti asintotiche in P sono le rette

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,0,1) \;\text{ i.e. }\; x-z = 0 = y-1$$

e

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(0,1,1) \;\text{ i.e. }\; x-1 = 0 = y-z.$$

(iv) L'equazione differenziale che definisce le linee asintotiche di Σ e' data da

$$\frac{2}{\sqrt{1+u^2+v^2}}du\,dv = 0.$$

Le curve integrali di questa equazione differenziale soddisfano quindi o $du = 0$ oppure $dv = 0$, quindi sono o $u =$ costante oppure $v =$ costante. Le linee asintotiche di Σ sono dunque le immagini delle linee coordinate del piano dei parametri $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ e quindi non sono altro che le rette della doppia rigatura di Σ. Essendo rette, il loro vettore curvatura e' ovunque nullo.