Istituto Nazionale di Alta Matematica F. Severi

Prova scritta del 26 Settembre 2018

Concorso a 8+5 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate
a iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica a.a. 2018-19

Istruzioni per la prova.

- Il tempo a disposizione è di tre ore e mezzo.
- E' vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande e aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati.

  Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato, pena l'annullamento della prova.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

Esercizi gruppo A

Esercizio A1. Sia $n \geq 2$. Il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$ agisce su $\mathbb{C}^n$ permutando le componenti:

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots x_{\sigma(n)}),$$

per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Tale azione è lineare e possiamo pertanto vedere ogni permutazione come operatore lineare su $\mathbb{C}^n$.

1. (3 punti) Si determini il sottospazio $U \subset \mathbb{C}^n$ dei vettori invarianti rispetto all'azione di $\mathfrak{S}_n$. Sia V il complemento ortogonale di U in $\mathbb{C}^n$ rispetto al prodotto scalare standard. Se ne trovi una base e si dimostri che è $\mathfrak{S}_n$-stabile (cioè, che $\mathfrak{S}_n(V) = V$).
2. (3 punti) L'azione lineare di $\mathfrak{S}_n$ si restringe ad un'azione lineare su V. Si determinino autovalori e relativi autospazi della trasposizione $(i, j) \in \mathfrak{S}_n$ (cioè, la permutazione che scambia i e j e fissa tutti gli altri numeri) come operatore lineare su V (dove $1 \leq i < j \leq n$).
3. (3 punti) Si determini la cardinalità dell'orbita del vettore
$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{d}, 1, 2, \ldots, n-d).$$
4. (3 punti) Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica positiva. Consideriamo ora la stessa azione di $\mathfrak{S}_n$ su $\mathbb{K}^n$:
$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots x_{\sigma(n)}),$$
per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Esistono sempre due sottospazi $\mathfrak{S}_n$-stabili $U, V \subset \mathbb{K}^n$ tali che $\mathbb{K}^n = U \oplus V$? Si dimostri l'affermazione o si fornisca un controesempio.

Esercizio A2. Sia φ la funzione di Eulero: per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\varphi(n) := \#\{m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq n \text{ e } MCD(m,n) = 1\}.$$

Sia inoltre G un gruppo finito di ordine n tale che per ogni divisore d di n vi sono al più d elementi con $x^d = e$.

1. (3 punti) Si dimostri che in un gruppo ciclico di ordine n il numero di elementi di ordine d è $\varphi(d)$ per ogni divisore d di n. Se ne deduca che $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

2. (3 punti) Sia $\psi(d)$ il numero di elementi di ordine d del nostro G. Si dimostri che $\psi(d) = \varphi(d)$ oppure $\psi(d) = 0$.

3. (3 punti) Si dimostri che G è ciclico. Se ne deduca che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico finito è ciclico.

4. (3 punti) Si dimostri che ogni sottogruppo finito del gruppo moltiplicativo $(\mathbb{K}^\times, *)$ di un campo $(\mathbb{K}, +, *)$ è ciclico.

Esercizio A3. Sia $\Phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$\Phi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),$$

dove $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ è la sfera 2-dimensionale $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

1. (3 punti) Dimostrare che Φ è una funzione iniettiva e suriettiva. Se ne scriva l'inversa $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$.

2. (3 punti) Mostrare che Φ è un omeomorfismo, che si estende ad un omeomorfismo $\bar{\Phi}$ tra $\mathbb{S}^2$ e la compattificazione di Alexandroff[1] di $\mathbb{R}^2$.

3. (3 punti) Dimostrare che Φ manda circonferenze[2] in $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ in circonferenze in $\mathbb{R}^2$. Mostrare che l'immagine delle circonferenze massime è l'insieme $\mathscr{C} = \{\Gamma_{\alpha,\beta} \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, dove

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - 1 = 0\}.$$

4. (3 punti) Sia $(x,y) \in B(0,r)$ con $r < 1$; mostrare che se $(x,y) \in \Gamma_{\alpha,\beta}$ allora $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{(1-r^2)^2}{4r^2}$ e in particolare il raggio di $\Gamma_{\alpha,\beta}$ risulta essere più grande di $\frac{1}{2r}$. Dedurre che se ho $p, q \in B(0,r)$ e $r < 1/3$, detto s il segmento che congiunge p a q, e detta γ l'immagine della geodetica che connette $F(p)$ a $F(q)$ in $\mathbb{S}^2$, si può mostrare che[3] $d_H(\gamma, s) \leq r^2 |p-q|$. Qui $d_H(X,Y)$ è la distanza di Hausdorff unilatera tra insiemi definita come

$$d_H(X,Y) = \sup_{x \in X} \left\{ \inf_{y \in Y} \{d(x,y)\} \right\}$$

[1] La compattificazione di Alexandroff $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ di uno spazio topologico (X, τ) è l'insieme $\tilde{X} = X \bigcup \{\infty\}$ dotato della topologia $\tilde{\tau} = \tau \bigcup \{\tilde{X} \setminus K \,:\, K$ è un compatto di $X\}$

[2] Una circonferenza in $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ è l'intersezione tra $\mathbb{S}^2$ ed un piano in $\mathbb{R}^3$ che non passi per $(0,0,1)$.

[3] Moralmente, se sono vicino al polo sud e traccio una retta sulla proiezione stereografica, quel percorso sarà una geodetica con un errore percentuale di $(1-\sin(\theta))^2$ dove θ è la minima latitudine raggiunta. Nel caso di $\theta = 60^o$ si ha un errore percentuale minore del 2%

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio B1. Sia $\mathscr{F}$ l'insieme delle funzioni $f \in C^2([0,1])$ tali che $f(0) = f(1) = 0$.

1. (3 punti) Dimostrare che per ogni $f \in \mathscr{F}$ si ha $\int_0^1 f'(x)^2\,dx = -\int_0^1 f(x)\cdot f''(x)\,dx$.

2. (3 punti) Dimostrare che esiste un numero reale $k > 0$ tale che per ogni $f \in \mathscr{F}$ si ha

$$\int_0^1 f'(x)^2\,dx \le k\left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 f''(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{0.1}$$

3. (3 punti) Determinare la minima costante k_0 per cui la disuguaglianza (0.1) vale per ogni $f \in \mathscr{F}$.

4. (3 punti) Esiste un numero reale $k > 0$ tale che la disuguaglianza (0.1) vale per tutte le funzioni $f \in C^2([0,1])$?

Esercizio B2. Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ una matrice a coefficienti reali. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = x^T Ax$ e inoltre siano

$$P = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i > 0 \forall i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

$$N = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

1. (3 punti) Mostrare che P è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$.

2. (6 punti) Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in N$;

(ii) $f|_P$ è convessa, cioè per ogni $x, y \in P$ si ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}; \tag{0.2}$$

(iii) Esiste un punto $p \in P$ e un suo intorno $U \subseteq P$ con U convesso, tale che $f|_U$ è convessa.

Quando una di queste affermazioni risulta vera si dice che A è bilanciata positiva.

3. (3 punti) Mostrare che la matrice $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = -|i-j|^2$ risulta essere bilanciata positiva.

Esercizio B3.
Si consideri $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tale che $f(0) = 0$. Assumiamo inoltre che esista $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$, una matrice a coefficienti reali simmetrica e definita positiva tale che[4]

$$M\,Df(x) + \Big(M\,Df(x)\Big)^T \le -I_n \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dove I_n è la matrice identità e abbiamo denotato con Df la matrice Jacobiana di f.

1. (3 punti) Sia $h(s) = f(sx)$; calcolare $h'(s)$. Dedurre che

$$f(x) = \int_0^1 Df(sx)x\,ds \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. (3 punti) Dimostrare che $x^T M f(x) + f(x)^T M x \le -x^T x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dedurre che $f(x) = 0$ implica $x = 0$.

3. (3 punti) Sia $V(x) = f(x)^T M f(x)$. Mostrare che:
   - $V(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $V(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
   - $V(x) \to \infty$ se $\|x\| \to \infty$.

4. (3 punti) Sia $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 che soddisfa l'equazione differenziale $\dot{y}(t) = f(y(t))$. Mostrare che V risulta essere una funzione di Lyapunov per tale evoluzione, in particolare

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) \le -\|f(y(t))\|^2.$$

   Dedurre[5] che $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

[4] La disuguaglianza è da intendersi nel senso delle forme quadratiche, dove $A \le B$ se e solo se $v^T A v \le v^T B v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$

[5] Suggerimento: mostrare prima che esiste una successione $t_k \to \infty$ tali che $f(y(t_k)) \to 0$, e quindi $V(y(t_k)) \to 0$. Concludere $V(y(t)) \to 0$ usando nuovamente la monotonia di $V \circ y$.

Soluzioni

Soluzione A1.

1. Un vettore $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ è $\mathfrak{S}_n$-invariante se e solo se

   $$(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

   per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Poiché per ogni coppia i, j con $1 \leq i, j \leq n$ esiste una permutazione σ tale che $\sigma(i) = j$ (per esempio, si può prendere la trasposizione (i, j)), otteniamo che $(x_1, \ldots, x_n)$ è invariante se e solo se

   $$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

   Pertanto
   $$U = \{(y, y, \ldots, y) \mid y \in \mathbb{C}\}.$$

   Si ricava dunque immediatamente che

   $$\begin{aligned} V &= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid y \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}. \end{aligned}$$

   Sia $e^i = (e^i_1, \ldots, e^i_n)$ l'i-simo vettore della base standard di $\mathbb{C}^n$:

   $$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

   Allora una base per V è $\{e^1 - e^2, e^2 - e^3, \ldots, e^{n-1} - e^n\}$. È immediato verificare che sono vettori linearmente indipendenti, data la lineare indipendenza dei vettori della base standard. Sappiamo inoltre che V ha dimensione $n-1$, poiché complemento ortogonale di U, che ha dimensione 1, in $\mathbb{C}^n$, pertanto i vettori scelti formano una base.

2. Cerchiamo $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che esista un $(x_1, \ldots, x_n)$ per cui valga

   $$(i, j) \cdot (x_1, x_2 \ldots, x_n) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

   Per definizione,
   $$(i, j) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

   dove
   $$x'_k = \begin{cases} x_k & \text{se } k \neq i, j, \\ x_j & \text{se } k = i, \\ x_i & \text{se } k = j. \end{cases}$$

   Pertanto, imponendo le uguaglianze

   $$\begin{cases} x_k = \lambda x_k & (\forall k \neq i, j) \\ x_j = \lambda x_i, \\ x_i = \lambda x_j, \end{cases}$$

   si deduce che vi sono due possibili autovalori: ± 1.

Un vettore $(x_1, \dots x_n) \in V$ è autovettore relativo all'autovalore 1 se e solo se $x_i = x_j$. Si noti che nel caso $n = 2$ si ha un'unica trasposizione: $(1,2)$ e l'unico $(x_1, x_2) \in V$ tale che $x_1 = x_2$ è l'origine, poiché $(x_1, x_2) \in V$ se e solo se $x_1 = -x_2$ e quindi in questo caso 1 non è autovalore. Per $n > 2$, l'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1 è un sottospazio $n-2$-dimensionale di V:

$$V_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{-2e^k + e^i + e^j \mid k \neq i, j\}.$$

Per quanto riguarda l'autovalore -1, si vede immediatamente che il vettore $e^i - e^j$ è autovettore e genera l'autospazio corrispondente V_{-1} (che non può aver dimensione maggiore di 1, poiché V ha dimensione $n-1$ e V_1 ha dimensione $n-2$).

3. La tesi segue dal teorema dell'orbita e dello stabilizzatore, che dice che, dato un gruppo G che agisce su un insieme X e un elemento $x \in X$, vale l'uguaglianza

$$\#(G \cdot x) = \frac{\#G}{\#\mathrm{Stab}_G(x)},$$

dove $G \cdot x$ denota l'orbita dell'elemento x rispetto all'azione di G e $\mathrm{Stab}_G(x)$ denota lo stabilizzatore di x in G. Nel nostro caso, sappiamo che $\#\mathfrak{S}_n = n!$ e pertanto per determinare la cardinalità dell'orbita dobbiamo determinare la cardinalità dello stabilizzatore S di $(0, \dots, 0, 1, 2, \dots, n-d)$.

Notiamo che $\sigma \in S$ se e solo se

$$\begin{cases} \sigma(k) \in \{1, \dots, d\} & \text{se } k \leq d, \\ \sigma(k) = k & \text{se } k > d. \end{cases}$$

Quindi possiamo permutare a nostro piacimento le prime d componenti di $(0, \dots, 0, 1, 2, \dots, n-d)$, mentre le altre devono rimanere immobili. Ne deduciamo che $\sigma \in S$ se e solo se esiste un $\sigma' \in \mathfrak{S}_d$ tale che

$$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma'(k) & \text{se } k \leq d, \\ k & \text{se } k > d. \end{cases}$$

Dunque, $\#S = \#\mathfrak{S}_d = d!$ e quindi la cardinalità dell'orbita di

$$(0, \dots, 0, 1, 2, \dots, n-d)$$

è $n!/d! = n(n-1)\dots(n-d+1)$.

4. No, tali sottospazi non esistono sempre. Per ottenere un controesempio basta considerare il caso $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. In questo caso, poiché i due sottospazi devono essere propri, cerchiamo due sottospazi $\mathfrak{S}_2$-stabili di dimensione 1. Come prima, possiamo prendere il sottospazio dei vettori invarianti: $U = \{(\overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{0})\}$. Se esistesse un altro sottospazio 1-dimensionale e $\mathfrak{S}_2$-stabile $V \subset \mathbb{F}_2^2$ tale che $U \oplus V = \mathbb{F}_2^2$, si dovrebbe avere $V \cap U = \{(\overline{0}, \overline{0})\}$ e quindi $V \subset \{(\overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{0})\}$. Poiché V deve essere $\mathfrak{S}_2$-stabile, esso contiene $(\overline{1}, \overline{0})$ se e solo se contiene $(\overline{0}, \overline{1})$. Questo implica che se $(\overline{1}, \overline{0}) \in V$, o se $(\overline{0}, \overline{1}) \in V$, anche $(\overline{1}, \overline{1}) \in V$, che è un assurdo perché ne segue $U \cap V \neq \{(\overline{0}, \overline{0})\}$.

Soluzione A2.

1. Un gruppo H è ciclico se e solo se esiste un elemento $g \in H$ di ordine n, ovvero tale che $H = \langle g \rangle = \{g^i \mid i = 1, \dots n\}$. Sia $e \in H$ l'elemento neutro. Se d divide n, allora possiamo considerare $g^{\frac{n}{d}}$. Questo è chiaramente un elemento di ordine d: $(g^{\frac{n}{d}})^d = g^n = e$ e se $k < d$ non può valere $(g^{\frac{n}{d}})^k = e$, altrimenti si avrebbe $g^{n\frac{k}{d}} = e$, ma $n\frac{k}{d} < n$, mentre g ha ordine n.

Se k è coprimo con d lo stesso argomento di prima dimostra che $g^{\frac{n}{d}k}$ ha ordine d. Se, invece, $MCD(k, d) = r > 1$, denotiamo $k' = \frac{k}{r}$ e $d' = \frac{d}{r}$, e si ha $(g^{\frac{n}{d}k})^{d'} = (g^{\frac{nk'}{d'}})^{d'} = e$, cioè $g^{\frac{n}{d}k}$ non ha ordine d. Ne deduciamo che in H vi sono esattamente $\varphi(d)$ elementi di ordine d.

Chiaramente, se $d \nmid n$ non vi sono elementi di ordine d.

Ne segue che

$$n = \sum_{d \mid n} \#\{h \in H \mid h \text{ ha ordine } d\} = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

2. Sia $a \in G$ un elemento di ordine d. Chiaramente, il gruppo ciclico che esso genera $H_a = \{a^i \mid i = 1, \ldots, d\}$ ha cardinalità d e tutti i suoi elementi soddisfano l'uguaglianza $x^d = e$. Dato che per ipotesi vi sono al più d elementi che la soddisfano, essi sono tutti contenuti in H_a. Ne deduciamo che se G ha almeno un elemento di ordine d, ne deve avere esattamente $\varphi(d)$, poiché essi sono gli elementi di ordine d in H_a per il punto precedente. Quindi se $\psi(d) \neq 0$ deve essere $\psi(d) = \varphi(d)$, come richiesto.

3. Per il Teorema di Lagrange sappiamo che se $d \nmid n$ non possono esserci elementi di ordine d in G e quindi

$$n = \#G = \sum_{d|n} \{x \in G \mid x \text{ ha ordine } d\} \leq \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Ma abbiamo dimostrato in (a) che $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ e pertanto per ogni divisore d il numero di elementi di G di ordine d deve essere esattamente $\varphi(d)$. Ne deduciamo in particolare che G deve essere ciclico, poiché quanto detto implica che vi sono $\varphi(n) \geq 1$ elementi di ordine n in G, ciascuno dei quali genera ovviamente il gruppo.

Sia ora K un sottogruppo di un gruppo ciclico finito H. Ovviamente, si ha che

$$\{k \in K \mid k^d = e\} \subseteq \{h \in H \mid h^d = e\}.$$

Poiché, per il punto (a), l'insieme a destra contiene 0 o $\varphi(d)$ elementi, la cardinalità dell'insieme a sinistra è $0 \leq \varphi(d) \leq d$. Siamo dunque nell'ipotesi della prima parte di questo punto, che possiamo applicare per ottenere che K è ciclico a sua volta.

4. Sia H un sottogruppo finito del sottogruppo moltiplicativo del campo $\mathbb{K}$. Denotiamo con $o(g)$ l'ordine dell'elemento g. Poiché $(\mathbb{K}, *)$ è abeliano, lo è anche H e dunque per ogni $h_1, h_2 \in H$ l'ordine del prodotto $o(h_1 h_2)$ divide $\mathrm{mcm}(o(h_1), o(h_2))$ (la verifica è immediata: $(h_1 h_2)^{\mathrm{mcm}(o(h_1), o(h_2))} = h_1^{\mathrm{mcm}(o(h_1), o(h_2))} h_2^{\mathrm{mcm}(o(h_1), o(h_2))} = e$). Vuol dire che esiste un elemento $g \in H$ di ordine massimale, dove $o(g) = \mathrm{mcm}(\{o(h) \mid h \in H\})$ e $o(g) < \infty$ poiché $\#H < \infty$. Ne deduciamo che $o(h) | o(g)$ per ogni $h \in H$. Poiché il polinomio $x^{o(g)} - 1$ ha al più $o(g)$ radici distinte, otteniamo che $\#H \leq o(g)$. D'altronde, per il Teorema di Lagrange, $o(g) | \#H$, da cui $\#H = o(g)$. Possiamo dunque concludere che $H = \langle g \rangle$.

Soluzione A3.

1. Per brevità, sia $p = (0, 0, 1)$ e $\mathbb{S}^2_0 = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_0$

$$F(x', y') = \left(\frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1} \right).$$

È facile vedere che $F(x', y') \in \mathbb{S}^2$; inoltre per essere $F(x', y') = p$ si dovrebbe avere $x' = y' = 0$ ma $F(0, 0) = (0, 0, -1)$. Dunque in effetti l'immagine di F è contenuta in $\mathbb{S}^2_0$. Con semplici calcoli si mostra che $\Phi \circ F = Id_{\mathbb{R}^2}$ e $F \circ \Phi = Id_{\mathbb{S}^2_0}$, da cui Φ ed F risultano entrambe biiettive.

2. Poiché Φ ed F risultano chiaramente continue, si ha che Φ è un omeomorfismo; inoltre che si estende ad un omeomorfismo $\bar{\Phi}$ tra $\mathbb{S}^2$ e la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$. Infatti è chiaro che per un qualunque intorno di $U \ni p$ con $U \in \mathbb{S}^2$ esiste $z_0 < 1$ tale che $\{z > z_0\} \bigcap \mathbb{S}^2 \subseteq U$. Ma $\Phi\{\{z > z_0\} \bigcap \mathbb{S}^2\} = \{(x', y') \ : \ \|(x', y')\| \geq \frac{1}{1 - z_0}\}$, e quindi intorni di p vengono mandati in intorni di ∞ nella compattificazione di $\mathbb{R}^2$; è facile verificare anche il viceversa. Definendo dunque $\tilde{\Phi}(p) = \infty$ e $\tilde{F}(\infty) = p$, si ha che entrambe queste estensioni risultano continue ed inoltre sono una l'inversa dell'altra, completando la dimostrazione che $\mathbb{S}^2$ è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$.

3. Una circonferenza in $\mathbb{S}^2_0$ è l'intersezione di un piano non passante per $(0, 0, 1)$ con la sfera $\mathbb{S}^2$. In particolare possiamo parametrizzare tali piani con

$$\Pi_{\alpha,\beta,\gamma} = \{\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \gamma \neq \delta.$$

Si consideri ora $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \Phi(\Pi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \bigcap \mathbb{S}^2_0)$. Grazie all'inversa F possiamo dire che $(x', y') \in \Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ se e solo se $F(x', y') \in \Pi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \bigcap \mathbb{S}^2_0$; tuttavia poiché l'immagine di F è contenuta in $\mathbb{S}^2_0$ si ha

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= \{(x', y') \,:\, F(x', y') \in \Pi_{\alpha,\beta,\gamma}\}. \\
&= \left\{(x', y') \,:\, \left(\frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1}\right) \in \Pi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\right\} \\
&= \left\{(x', y') \,:\, \alpha\frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1} + \beta\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1} + \gamma\frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1} = \delta\right\} \\
&= \left\{(x', y') \,:\, 2\alpha x' + 2\beta y' + \gamma(x'^2 + y'^2 - 1) = \delta(x'^2 + y'^2 + 1)\right\} \\
&= \left\{(x', y') \,:\, (\gamma - \delta)x'^2 + (\gamma - \delta)y'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' - \gamma - \delta = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Quindi, ricordando che $\gamma \neq \delta$ otteniamo che $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}$ è una circonferenza (o un insieme vuoto). Le circonferenze massime sono quelle per cui $\Pi_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ passa per l'origine, e dunque quelle con $\delta = 0$. In particolare possiamo porre per omogeneità $\gamma = 1$ e abbiamo

$$\Gamma_{\alpha,\beta,1,0} = \left\{(x', y') \,:\, x'^2 + y'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' - 1 = 0\right\} = \Gamma_{\alpha,\beta},$$

da cui la tesi.

4. (3 punti) Sia $(x, y) \in B(0, r) \bigcap \Gamma_{\alpha,\beta}$. Si ha, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$1 - x^2 - y^2 = 2\alpha x + 2\beta y \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}(x^2 + y^2)^{1/2},$$

da cui, se $r \leq 1$, si ha $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{4}(1/r - r)^2$. Detto r_0 il raggio di $\Gamma_{\alpha,\beta}$, si ha $r_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 1$ da cui si deduce $r_0 \geq \frac{1}{2}(1/r + r) \geq \frac{1}{2r}$.

Consideriamo ora $r < 1/3$ e $p, q \in B(0, r)$; detta γ l'immagine della geodetica tra p e q sulla sfera si ha $\gamma \subseteq \Gamma_{\alpha,\beta}$; supponiamo che esso sia l'arco minore e mostriamo che in questo modo si può concludere. Difatti in questo caso è chiaro che $d_H(\gamma, s) = d(R, s)$ dove R è il punto medio sull'arco minore pq. Detto R' il punto diametralmente opposto e M il punto medio del segmento pq è facile mostrare (similitudine di triangoli) che $|p - M| \cdot |q - M| = |M - R| \cdot |M - R'|$, da cui

$$d(R, s) \leq \frac{|p - q|^2}{4|M - R'|} \leq \frac{r|p - q|^2}{2} \leq r^2|p - q|,$$

dove abbiamo utilizzato $|M - R'| \geq r_0 \geq \frac{1}{2r}$ e $|p - q| \leq 2r$.

Per dimostrare che in effetti la geodetica che connette p e q sulla sfera è l'arco minore è sufficiente osservare che, poiché $p, q \in B(0, 1)$ vuol dire che essi sono nella semisfera inferiore, ma allora tutta la geodetica è contenuta nella semisfera inferiore, quindi in $B(0, 1)$. Ora, poiché $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{4}(1/r - r)^2 > 1$, abbiamo che il centro di $\Gamma_{\alpha,\beta}$ risulta essere esterno a $B(0, 1)$, ma allora più di metà circonferenza risulterà esterna a $B(0, 1)$ e quindi l'arco pq che rappresenta la geodetica, essendo tutto contenuto in $B(0, 1)$ è per forza quello minore.

In realtà per avere almeno metà della circonferenza fuori è sufficiente che risulti $\alpha^2 + \beta^2 + r_0^2 \geq 1$; ma $\alpha^2 + \beta^2 + r_0^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) + 1 > 1$, quindi in realtà è sufficiente considerare $r < 1$.

Soluzione B1.

1. È sufficiente usare la formula di integrazione per parti e dedurre quindi che

$$\int_0^1 f'(x) \cdot f'(x)\, dx = f(x) f'(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot f''(x)\, dx;$$

si deduce il punto 1 usando che $f(0) = f(1) = 0$.

2. Partendo dall'equazione al punto 1 si applichi la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per ottenere la tesi con $k = 1$. Infatti si ha

$$\int_0^1 f'(x)^2\,dx = \int_0^1 (-f(x))\cdot f''(x)\,dx \le \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 f''(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Considerando la funzione $f(x) = \sin(\pi x)$, si ottiene che se k verifica (0.1) allora $k \ge 1$. Avendo dimostrato che $k = 1$ funziona, ne deduciamo che $k_0 = 1$.

4. No. Basta considerare la funzione $f(x) = x$. Abbiamo $f'(x) = 1$ e $f''(x) = 0$, da cui si dovrebbe avere

$$1 \le k \cdot \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 0 = 0,$$

che è assurdo.

Soluzione B2.

1. Siano $x, y \in P$ e sia $t \in (0,1)$; voglio dimostrare che $z := tx + (1-t)y \in P$. Poiché $x_i > 0$ e $y_i > 0$ è ovvio che sia $z_i = tx_i + (1-t)y_i > 0$. Inoltre

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n tx_i + (1-t)y_i = t\sum_{i=1}^n x_i + (1-t)\sum_{i=1}^n y_i = t + (1-t) = 1.$$

2. Essendo $f(x)$ una funzione quadratica per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ vale l'identità del parallelogramma

$$2f(x_1) + 2f(x_2) = f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2).$$

In particolare scegliendo $x_1 = x/2$ e $x_2 = y/2$ otteniamo

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) + 2f\left(\frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Usando inoltre che $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ otteniamo infine che

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x-y}{2}\right); \tag{0.3}$$

nel caso in cui $x, y \in P$ abbiamo che $x - y \in N$ e dunque da (i) segue $\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge 0$. La seconda implicazione è ovvia quindi passiamo alla terza. Sia $v \in N$; per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo si ha che $p + \varepsilon v, p - \varepsilon v \in P \cap U$. Ma allora applichiamo (0.3) con $x = p + \varepsilon v$ e $y = p - \varepsilon v$, ottenendo

$$f(\varepsilon v) = \frac{f(p+\varepsilon v) + f(p - \varepsilon v)}{2} - f(p);$$

quest'ultima quantità è non negativa per la convessità e dunque $\varepsilon^2 f(v) \ge 0$ e allora $f(v) \ge 0$. Per l'arbitrarietà di $v \in N$ possiamo concludere.

3. Sia $x \in N$. Allora

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j a_{ij} = -\sum_{i,j=1}^n x_i x_j |i-j|^2 \\ &= -\sum_{i,j=1}^n i^2 x_i x_j - \sum_{i,j=1}^n j^2 x_i x_j + 2\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \cdot i \cdot j \\ &= -2\sum_{i,j=1}^n i^2 x_i x_j + 2\left(\sum_{i=1}^n i x_i\right)^2. \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo che $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ e quindi

$$\sum_{i,j=1}^n i^2 x_i x_j = \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n i^2 x_i\right) = 0,$$

per concludere che $f(x) = 2\left(\sum_{i=1}^n i x_i\right)^2 \geq 0$ per ogni $x \in N$. Dunque A risulta essere bilanciata positiva.

Soluzione B3.

1. Posso vedere $h(s)$ come funzione composta $f(g(s))$, dove $g(s) = sx$. Per la regola di derivazione di una funzione composta si ha
$$h'(s) = Df(g(s))g'(s) = Df(sx)x.$$
Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha
$$f(x) = f(x) - f(0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(s)\,ds = \int_0^1 Df(sx)x\,ds.$$

2. Usando il punto precedente posso scrivere
$$\begin{aligned} x^T M f(x) + f(x)^T M x &= \int_0^1 \left(x^T M\, Df(sx)x + x^T (Df(sx))^T\, Mx\right) ds \\ &= \int_0^1 x^T \left(M\, Df(sx) + \left(M\, Df(sx)\right)^T\right) x\,ds \qquad\qquad \leq -x^T x \end{aligned}$$
Dove nell'ultima riga si usa l'ipotesi che abbiamo su f. Sia ora x_0 tale che $f(x_0) = 0$; ponendo $x = x_0$ nella disuguaglianza appena mostrata si ottiene $0 \leq -\|x_0\|^2$ e dunque $x_0 = 0$.

3. Sicuramente $V(x) \geq 0$ poiché M è una matrice definita positiva. Inoltre $V(x) = 0$ se e solo se $f(x) = 0$, che, per quanto dimostrato nel punto precedente, si verifica se e solo se $x = 0$. Supponiamo ora che esista una successione x_k tale che $\|x_k\| \to \infty$ ma $\sup_k \|f(x_k)\| \leq C$ per qualche $C > 0$. Ma allora avremmo
$$\left|x_k^T M f(x_k) + f(x_k)^T M x_k\right| \leq 2C\|M\|\|x_k\|;$$
d'altronde per la disuguaglianza mostrata al punto 2, si ha
$$\left|x_k^T M f(x_k) + f(x_k)^T M x_k\right| \geq \|x_k\|^2,$$
da cui la contraddizione con $\|x_k\| \to \infty$.

4. Innanzitutto si ha $\frac{d}{dt} f(y(t)) = Df(y(t))\dot{y}(t) = Df(y(t))f(y(t))$. In particolare
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(y(t)) &= \frac{d}{dt}\left(f(y(t))^T M f(y(t))\right) \\ &= f(y(t))^T M \left(\frac{d}{dt} f(y(t))\right) + \left(\frac{d}{dt} f(y(t))\right)^T M f(y(t)) \\ &= f(y(t))^T \left(M\, Df(y(t))\right) f(y(t)) + f(y(t))^T \left(Df(y(t))^T M\right) f(y(t)) \leq -\|f(y(t)\|^2. \end{aligned}$$
Questo dimostra che $\eta(t) := V(y(t))$ è una funzione decrescente in t, che quindi risulta avere un limite quando $t \to \infty$, ed esso è finito poiché $V \geq 0$. In particolare si ha $\eta'(t_k) \to 0$ per una successione $t_k \to \infty$ (questo perché altrimenti esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\eta'(t) < -\varepsilon$ definitivamente, ma ciò è in contraddizione con $\eta \geq 0$), e quindi per questa successione si ha $f(y(t_k)) \to 0$. Ma allora $V(y(t_k)) \to 0$ e per monotonia si ottiene $V(y(t)) \to 0$. Per la seconda parte del punto precedente abbiamo che $y(t)$ in particolare è una curva limitata e quindi ammette punti limite; tuttavia per qualunque punto limite ℓ, usando la continuità di V si dovrebbe avere $V(\ell) = \lim V(y(t)) = 0$ da cui $\ell = 0$.