

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, **motivando adeguatamente le risposte**.

Una proposizione contenuta nel testo di un problema, della quale sia richiesta la dimostrazione, può comunque essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta.

Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

- (1) Un triangolo acutangolo ABC , i cui angoli di vertici A, B, C hanno ampiezze indicate rispettivamente con α, β, γ , è inscritto nella circonferenza δ .
- (a) Le bisettrici uscenti da A, B, C si incontrano nell'incentro I del triangolo ABC ed intersecano ulteriormente la circonferenza δ nei punti A', B', C' .
Esprimere le ampiezze α', β', γ' degli angoli del triangolo $A'B'C'$ in funzione di α, β, γ .
Dimostrare che I è l'ortocentro del triangolo $A'B'C'$.
- (b) Le altezze uscenti da A, B, C si incontrano nell'ortocentro H del triangolo ABC ed intersecano ulteriormente la circonferenza δ nei punti A'', B'', C'' .
Esprimere le ampiezze $\alpha'', \beta'', \gamma''$ degli angoli del triangolo $A''B''C''$ in funzione di α, β, γ .
Dimostrare che H è l'incentro del triangolo $A''B''C''$.
- (c) Dimostrare che, ripetendo più volte la costruzione $ABC \rightsquigarrow A'B'C'$ (applicandola via via ai nuovi triangoli ottenuti), si otterranno sempre dei triangoli acutangoli.
- (d) Dimostrare che, ripetendo più volte la costruzione $ABC \rightsquigarrow A''B''C''$ (applicandola via via ai nuovi triangoli ottenuti), si otterranno sempre dei triangoli acutangoli se e solo se il triangolo iniziale ABC è equilatero.
- (2) (a) Mostrare che gli interi $s = 50^2 + 2$ e $t = 50^2 + 1$ verificano la relazione $0 < \sqrt{s} - \sqrt{t} < 0,01$.
- (b) Trovare due interi positivi v e w tali che $0,01 < \sqrt{v} - \sqrt{w} < 0,02$.
- (c) Dimostrare che, comunque si prenda un numero reale positivo a , esistono due interi positivi m e n tali che $a < \sqrt{m} - \sqrt{n} < a + 0,01$.
- (3) Un mazzo è formato da un numero N di carte. Su ciascuna carta sono presenti 8 diversi simboli. Si sa che, prendendo una qualsiasi coppia di carte dal mazzo, esse hanno esattamente un simbolo in comune. Tuttavia, non esiste un simbolo che sia presente in tutte le carte.
- (a) Dimostrare che nessun simbolo può essere presente in più di 8 carte.
- (b) Dimostrare che $N \leq 57$.
- (c) Dimostrare che i simboli complessivamente utilizzati sono almeno N .
- (d) Dimostrare che, se $N \geq 50$, allora i simboli utilizzati sono complessivamente 57.

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1. A B C D E

Quesito 2. A B C D E

Quesito 3. A B C D E

Quesito 4. A B C D E

Quesito 5. A B C D E

Quesito 6. A B C D E

Quesito 7. A B C D E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8.

Quesito 9.

Quesito 10.

Qualora il candidato intenda modificare una risposta già data, è necessario che indichi senza ambiguità la risposta effettivamente scelta (o eventualmente la volontà di non dare alcuna risposta).