Concorso a 10 borse per la Laurea Specialistica in Discipline Matematiche

Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"

PROVA SCRITTA DEL 27/09/2006

Istruzioni per lo svolgimento della prova

- Il tempo a disposizione è di 4 ore; è vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi delle parti A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3} \min\{p_A,\ p_B\}.$$
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati ed il testo e chiudere il plico. IMPORTANTE: NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento, in nessuna altra parte dell'elaborato.

GRUPPO A

Esercizio 1 Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, tale che
$$|f(x)| \le M_0, \quad |f''(x)| \le M_2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
con M_0, M_2 costanti positive. Si dimostri che $|f'(x)| \le 2\sqrt{M_0 M_2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. [Punti 9]

Esercizio 2 Sia $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{2x-y}{x^2+y^2}\,, \frac{x+2y}{x^2+y^2} \right).$$
(a) Calcolare $\oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. [Punti 3]
(b) Calcolare $\oint_\eta \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$, dove $\eta(t) = ((3+\sin t)\cos t, (3+\sin t)\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. [Punti 5]

Esercizio 3 Siano date le funzioni
$$f_n(x) = \frac{nx}{\log n} - n^2 \sin\left(\frac{x}{n \log n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ x \in \mathbb{R}.$$
(a) Dimostrare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. [Punti 5]

(b) Detta $f(x)$ la somma della serie del punto (a), dimostrare che f è continua in $\mathbb{R}$. [Punti 6]

Esercizio 4 Si consideri l'equazione differenziale

$$t\,x'(t) = 4(t+1)x(t) + 8\,t^3\sqrt{x(t)}, \qquad t > 0,\ x \geq 0.$$

(a) Determinare l'integrale generale nel quadrante $x > 0$, $t > 0$. [Punti 7]
(b) Determinare tutte le soluzioni del problema di Cauchy $x(1) = 0$, definite su tutta la semiretta $t > 0$. Discutere il risultato. [Punti 9]

Esercizio 5 Un punto materiale di massa unitaria si muove sulla retta reale obbedendo all'equazione:

$$\ddot{x} = F(x),$$

dove $F(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^2}$.
(a) Si trovi un integrale primo del moto [Punti 3]
Si considerino le traiettorie di dato iniziale $x = 0$, $\dot{x} = u \in \mathbb{R}$.
(b) Si dica per quali valori di u

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty.$$

[Punti 6]
(c) Si dimostri che per $u > 0$ sufficientemente piccolo le traiettorie sono periodiche. Indicando con $T(u)$ il periodo della traiettoria si calcoli

$$\lim_{u\to 0} T(u).$$

[Punti 6]

Esercizio 6 Sia Ω un insieme di N elementi. Chiamiamo $d(N)$ il numero di partizioni distinte di Ω.
(a) Dimostrare che

$$d(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} d(k) \tag{1}$$

dove $d(0) = 1$. [Punti 8]
(b) Dimostrare che

$$d(N) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^N}{k!}. \tag{2}$$

verificando che la (2) soddisfa la relazione di ricorrenza (1). [Punti 5]

GRUPPO B

Esercizio 1 Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate reali di ordine 2. Verificare che ogni matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, diversa dalla matrice identità e per cui $A^3 = I$, ha necessariamente traccia uguale a -1. [Punti 9]

Esercizio 2 Sia data in $\mathbb{R}^3$ la curva sghemba di equazioni parametriche

$$\alpha(u) = (u^3, u^2, u), \ u \in \mathbb{R}.$$

(i) Scrivere le equazioni parametriche $F(u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$, della superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ottenuta come rigata sviluppabile delle tangenti alla curva $\alpha(u)$ e determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per $O = (0, 0, 0)$ e contenente come direzioni il versore normale $\underline{n}_0$ ed il versore binormale $\underline{b}_0$ della curva $\alpha(u)$ nel punto O (i.e. π è il *piano normale* ad $\alpha(u)$ in O). [Punti 3]
(ii) Denotata con C la curva ottenuta dall'intersezione di Σ con il piano π, determinare le equazioni parametriche e cartesiane della curva C. [Punti 7]
(iii) Verificare che la curva C è singolare nel punto O e determinare infine il tipo di singolarità che C ha in O. [Punti 8]

Esercizio 3 Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale, con riferimento proiettivo standard.
(i) Determinare l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i punti fondamentali $E_0 = [1, 0, 0]$, $E_1 = [0, 1, 0]$, $E_2 = [0, 0, 1]$ e per il punto unità $U = [1, 1, 1]$. [Punti 5]
(ii) Scrivere l'equazione dell'unica conica C del fascio $\mathcal{F}$ che passa per il punto $P = [1, 2, 1]$; determinare la classificazione proiettiva di C e dedurre quindi l'equazione della sua forma canonica proiettiva. [Punti 4]

Esercizio 4 Sia $\mathbb{R}^4$ dotato della topologia euclidea e sia

$$E := \{(t, a, b, c) \in \mathbb{R}^4 | at^2 + bt + c = 0\}.$$

Siano inoltre

$$p : E \to \mathbb{R}^3$$

definita come

$$p(t, a, b, c) = (a, b, c),$$

e

$$F_{(a,b,c)} = p^{-1}((a, b, c)),$$

per $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
(i) Stabilire se E è chiuso e se E è compatto. [Punti 3]

(ii) Per quali terne $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $F_{(a,b,c)}$ risulta chiuso? E per quali risulta compatto? [Punti 3]
(iii) Sia $C := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | F_{(a,b,c)} = \emptyset\}$. Stabilire se C è chiuso o se C è aperto. [Punti 3]

Esercizio 5 Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss. Si considerino gli ideali

$$J_1 = (4i, 8+16i) \text{ e } J_2 = (3i, 9+21i).$$

(a) Stabilire quali tra gli ideali J_k, per $k = 1, 2$, sono tali che:
(1) $\frac{\mathbb{Z}[i]}{J_k}$ è un dominio di integrità,
(2) $\frac{\mathbb{Z}[i]}{J_k}$ è un campo
[Punti 9]
(b) Per $k = 1, 2$, determinare la cardinalità e la caratteristica di $\frac{\mathbb{Z}[i]}{J_k}$. Stabilire infine se $\frac{\mathbb{Z}[i]}{J_k}$ ha eventuali elementi nilpotenti e, in caso affermativo, esibirne almeno uno. [Punti 9]

Esercizio 6 Sia $(G, *)$ un gruppo finito di ordine dispari. Dimostrare che allora ogni elemento di G è un quadrato (i.e. per ogni $g \in G$ esiste un $h \in G$ tale che $g = h * h = h^2$). [Punti 9]