Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"

PROVA SCRITTA DEL 28-09-2007

Istruzioni per lo svolgimento della prova

- Il tempo a disposizione è di 3 ore; è vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = \max\left\{p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A,\ p_B\} - 5,\ 0\right\}.$$
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati ed il testo e chiudere il plico. IMPORTANTE: NON scrivere il proprio nome, né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento, in nessuna altra parte dell'elaborato.
- Errori gravi comportano punteggi negativi. *Scrivete chiaramente: non si terrà conto delle risposte illeggibili o non sufficientemente giustificate.*

ESERCIZI: GRUPPO A

A-1 Dato uno spazio metrico Y indichiamo con $\mathcal{F}(Y)$ la famiglia dei sottoinsiemi compatti non vuoti di Y dotata della distanza di Hausdorff
$$d_H(C, D) := \inf\left\{\rho \geq 0 :\ C \subset D_\rho,\ D \subset C_\rho\right\}$$
dove C_ρ indica il ρ-intorno chiuso di C.
Siano ora $D_1, D_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ le cui frontiere sono parametrizzate in senso antiorario dalle curve regolari semplici $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$. Mostrare che
a) $d_H(D_1, D_2) \leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$.
b) non esiste alcuna costante c indipendente da D_1, D_2 tale che $d_H(D_1, D_2) \leq c\, d_H(\partial D_1, \partial D_2)$.
[Punti 10]

A-2 Dati $z_1, \ldots, z_n$ numeri complessi, sia A la matrice complessa $n \times n$ definita da
$$A_{ij} := \sum z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_{j-1}}$$
dove la somma viene fatta su tutte le sequenze strettamente crescenti di indici $k_1, \ldots k_{j-1}$ tali che $k_h \neq i$ per ogni h – in altre parole A_{ij} è la somma di tutti i possibili prodotti di $j-1$ numeri scelti tra $z_1, \ldots, z_n$ con l'esclusione di z_i (si conviene in particolare che $A_{i1} = 1$ per ogni i). Ad esempio per $n = 4$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & z_2 + z_3 + z_4 & z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 & z_2 z_3 z_4 \\ 1 & z_1 + z_3 + z_4 & z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_3 z_4 & z_1 z_3 z_4 \\ 1 & z_1 + z_2 + z_4 & z_1 z_2 + z_1 z_4 + z_2 z_4 & z_1 z_2 z_4 \\ 1 & z_1 + z_2 + z_3 & z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 & z_1 z_2 z_3 \end{pmatrix}.$$
Calcolare il determinante di A.
[Punti 7]

A-3 Si determini l'anello degli interi del campo $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Nota. Si ricordi che un elemento $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ è un *intero* se è radice di un polinomio monico a coefficienti in $\mathbb{Z}$.
[Punti 10]

A-4 Si considerino due facce adiacenti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ del cubo di Rubik, e si consideri il movimento ottenuto ruotando prima $\mathcal{A}$ e poi $\mathcal{B}$ di $\pi/2$ in senso antiorario (rispetto alla normale uscente dal cubo). Quante volte sarà necessario ripetere questo movimento per tornare alla configurazione iniziale?
[Punti 7]

A-5 Siano R_α, R_β due rotazioni antiorarie della sfera S^2 (orientata rispetto alla normale uscente alla sfera) di angoli $\alpha, \beta \in (0, \pi)$. Siano a, b i cerchi massimi (geodetiche di S^2) lasciati invariati rispettivamente da R_α e R_β, sia $O \in a \cap b$ e sia γ l'angolo che essi formano tra di loro. Si considerino infine i punti:

$$A^- = R^{-1}_{\frac{\alpha}{2}}(O) \qquad A^+ = R_{\frac{\alpha}{2}}(O) \qquad B^- = R^{-1}_{\frac{\beta}{2}}(O) \qquad B^+ = R_{\frac{\beta}{2}}(O)$$

dove $R_{\frac{\alpha}{2}}, R_{\frac{\beta}{2}}$ sono le rotazioni di uguali assi ma di angoli $\alpha/2$ e $\beta/2$.

(i) Se $R = R_\beta \circ R_\alpha$, si stabilisca quali delle seguenti terne sono allineate su S^2 (i.e. appartengono a uno stesso cerchio massimo):
a: A^-, B^+, $R(A^-)$
b: A^-, B^+, $R^{-1}(B^+)$
c: $R_\beta(A^-)$, O, $R^{-1}_\beta(A^+)$
(ii) Dedurre qual è il cerchio massimo lasciato invariato da R
(iii) Calcolare l'angolo di rotazione di R assumendo $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ e $\cos\gamma = \sqrt{2} - 1$
(iv) Si calcoli l'area del triangolo sferico equilatero di lati $\frac{\pi}{4}$ e angoli ai vertici uguali a γ.

Suggerimento. Si ricordi il teorema di Carnot per triangoli sferici di lati a, b, c e angolo γ opposto a c: $\cos c = \cos a \, \cos b + \cos\gamma \, \sin a \, \sin b$.
[Punti 11]

ESERCIZI: GRUPPO B

B-1 Data A matrice reale $n \times n$, si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$\ddot{x} + Ax = 0 \tag{1}$$

(dunque la funzione incognita x ha valori in $\mathbb{R}^n$).
a) Per quali matrici A *simmetriche* le soluzioni di (1) sono tutte limitate?
b) Per quali matrici A *con tutti gli autovalori reali* le soluzioni di (1) sono tutte limitate?
[Punti 7]

B-2 Data una sucessione $(X_n)_{n\geq 1}$ di variabili aleatorie identicamente distribuite, con legge esponenziale di parametro uno, sia $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e

$$U_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}.$$

a) Si mostri che se f è continua e limitata allora

$$\mathbb{E}(f(U_n)) = \frac{n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}}{(n-1)!}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} f(z)\psi_n(z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

dove ψ_n è una funzione limitata su tutti i compatti e $\lim_{n\to\infty}\psi_n(z) = 1$.

b) Se ne deduca la formula di Stirling.

[Punti 11]

B-3 Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla retta soggetto ad una forza di potenziale $V(x) = x^2/2 + x^3/3$.

a) Si dica per quali condizioni iniziali il moto è periodico e si stimi l'insieme dei periodi possibili.

b) Si dimostri che esistono orbite periodiche in cui il valore medio della posizione non è nullo (detta $x(t)$ una orbita periodica di periodo T il valore medio è definitio come $T^{-1}\int_0^T x(t)dt$).

[Punti 10]

B-4 Sia $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare di classe C^3 con $|\dot\gamma(t)| = 1$ per ogni t, e sia C l'immagine di γ. Per ogni $x \in C$ indichiamo con P_x il piano affine passante per x ed ortogonale a C, vale a dire

$$P_x := \left\{y \in \mathbb{R}^3 : (y - x)\cdot\dot\gamma(t) = 0\right\}$$

dove t soddisfa $x = \gamma(t)$. Per ogni $x \in C$ sia dato un insieme compatto E_x contenuto in P_x in modo tale che il baricentro di E_x è uguale a x. Inoltre, per ogni $x, y \in C$, $x \neq y$, E_x ed E_y sono disgiunti. Infine l'insieme

$$E := \bigcup_{x\in C} E_x$$

risulta essere compatto. Si assuma sufficiente regolarità per la famiglia di insiemi $\{E_x\}$ e si dimostri che

$$\mathrm{vol}(E) = \int_0^L \mathrm{area}(E_{\gamma(t)})\,dt\ .$$

[Punti 7]

B-5 Dato $N \in \mathbb{N}$, si consideri l'insieme $\Omega = \{0, 1\}^N$ e la funzione $H : \Omega \to \mathbb{R}_+$ definita da $H(\omega) = \sum_{i=1}^N \omega_i$. Data una misura di probabilità μ su Ω si definisca $h(\mu) := -\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\{\omega\})\ln\mu(\{\omega\})$. Fissato $E \in (0, N)$, tra tutte le misure di probabilità su Ω tali che $\sum_{\omega\in\Omega} H(\omega)\mu(\{\omega\}) = E$ si trovino esplicitamente quelle per cui h è massima.

[Punti 10]