BORSE 2007-2008 DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Il giorno 11 settembre 2007 si è svolta la consueta prova scritta per il concorso a 40 borse di studio destinate agli studenti che si immatricolano ai corsi di laurea in Matematica, anche quest'anno organizzato dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica, e sponsorizzato dal Progetto Lauree Scientifiche (vedi *Archimede*, *n*. 3 del 2006, pag. 118). La prova, preparata dalla commissione composta dai Proff. Claudio Bernardi, Alessandro D'Andrea, Paolo Francini, Stefano Mortola ed Elisabetta Strickland, si articolava in un questionario contenente dieci quesiti a risposte multiple e in tre problemi dei quali si richiedeva un completo svolgimento. La graduatoria è stata stilata assegnando 20 punti a ciascuno dei tre problemi, ed un totale di 50 punti per il questionario. Il massimo punteggio ottenibile era pertanto di 110 punti, mentre la prima candidata classificata ha ottenuto un eccellente 107.

Alla prova hanno partecipato 634 studenti, che rappresentano una rilevante porzione del totale degli iscritti al primo anno in Matematica. A conferma della capacità della prova di selezionare i migliori candidati, vi è stata anche quest'anno una notevole sovrapposizione tra i primi classificati nel concorso dell'INdAM e quelli dei concorsi presso prestigiose istituzioni nazionali, che ha portato a circa venti rinunce.

Tra gli argomenti trattati nella prova vi sono calcolo delle probabilità, combinatoria, logica, geometria sia piana che solida, aritmetica ed algebra. Il testo è risultato più difficile rispetto agli anni passati, e la commissione ha deciso di fissare la soglia di idoneità a 35 punti: sono così risultati idonei 198 studenti. Le borse sono state assegnate fino alla sessantaduesima posizione, che corrisponde a 58,4 punti.

A seguire, riporto il testo della prova, completo di soluzioni. È importante sottolineare come possano esservi più modi di risolvere ciascun esercizio, e che la soluzione riportata è solo una proposta tra le tante possibilità. La numerazione dei quesiti nel questionario non coincide con quella originaria del concorso: erano state infatti consegnate ai partecipanti più versioni, che differivano tra loro solo nell'ordine dei quesiti e delle risposte.

1. IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla e in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Per quanto riguarda i quesiti a risposta multipla, una e una sola tra le cinque risposte è esatta; sono assegnati 0 punti per ogni risposta sbagliata, 1,5 punti per ogni risposta non data e 5 punti per ogni risposta esatta. Per ciascuno dei problemi viene assegnato un punteggio da 0 a 20.

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Lanciando 3 dadi, qual è la probabilità che il prodotto dei numeri ottenuti sia multiplo di 3?

(A) 1
(B) 5/9
(C) 2/3
(D) 19/27
(E) 91/216

2. In una pagina di un vecchio manoscritto matematico si parla di due numeri positivi x e y. Il testo si è rovinato e non è più leggibile, ma si riesce a capire che solo una delle affermazioni seguenti deve essere vera. Quale?

(A) $x > y$
(B) $x > 2y$
(C) $x > y^2$
(D) $x^2 > y^2$
(E) $x^2 > 2y^2$

3. Quanti sono gli interi positivi n di due cifre tali che $10n$ è 11 volte la somma dei quadrati delle due cifre di n?

(A) nessuno
(B) 1
(C) 2
(D) 4
(E) 11

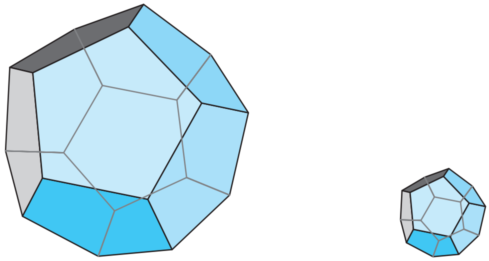
4. Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 30 e 40. Tracciando l'altezza, la mediana e la bisettrice dal vertice dell'angolo retto, l'ipotenusa viene divisa in 4 segmenti. Qual è la misura del più breve tra essi?

(A) 24/7
(B) 15/4
(C) 16/5
(D) 25/6
(E) 25/8

5. Sara vuol riempire una tabella 4×4 scrivendo in ogni casella il numero 0 oppure il numero 1, in maniera che nessuna delle somme lungo una riga o una colonna superi 1. In quanti modi Sara può riempire la tabella?

(A) 65
(B) 69
(C) 93
(D) 196
(E) 209

6. Due dodecaedri regolari hanno volumi V' e V'' ed aree totali, rispettivamente, A' e A''.



Sappiamo che $A'/A'' = 8$ e che V'' misura $\sqrt{10}$. Quanto misura V'?

(A) $4\sqrt{5}$
(B) $8\sqrt{10}$
(C) $32\sqrt{5}$
(D) $20\sqrt{2}$
(E) $64\sqrt{10}$

7. Dall'insieme di numeri $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ estraiamo una progressione aritmetica (non costante) $x_1, x_2, \dots, x_k$. Possiamo affermare che la lunghezza k della sequenza

(A) è al massimo 2
(B) è al massimo 3
(C) è al massimo 4
(D) è al massimo 12
(E) può essere arbitrariamente grande

8. La successione di interi A_n è costruita in questo modo: $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, e, per $n > 1$, A_n si ottiene sottraendo ad A_{n-1} la somma di tutti i termini precedenti: $A_n = A_{n-1} - (A_0 + \dots + A_{n-2})$.

Ad esempio, $A_2 = A_1 - A_0$, $A_3 = A_2 - (A_0 + A_1)$, $A_4 = A_3 - (A_0 + A_1 + A_2)$.

Qual è il valore di A_{2007}?

(A) -4^{669}
(B) -2^{1002}
(C) 0
(D) 2^{1003}
(E) 2^{1004}

9. In un cerchio di raggio 1, le corde AC e BD si intersecano ortogonalmente in un punto interno al cerchio. Quali valori può assumere la somma $\overline{AC}+\overline{BD}$?

(A) i valori compresi tra 2 e $3\sqrt{2}$
(B) i valori compresi tra 2 e 4
(C) i valori compresi tra $2\sqrt{2}$ e 4
(D) i valori compresi tra $\sqrt{2}$ e 4
(E) i valori compresi tra $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$

10. Di un triangolo si conoscono le lunghezze di due mediane, che sono 10 e 12. Quanto può essere, al massimo, l'area del triangolo?

(A) 100
(B) 60
(C) 80
(D) 90
(E) può essere arbitrariamente grande

B) PROBLEMI

1. La circonferenza γ' è tangente ed interna alla circonferenza γ nel punto T. Preso un punto X (diverso da T) in γ', sia AB la corda di γ tangente a γ' in X, e siano A' e B' i punti d'intersezione di γ' con TA e con TB, rispettivamente.

(a) Dimostrare che AB e $A'B'$ stanno su rette parallele.
(b) Dimostrare che TX è la bisettrice dell'angolo $A\hat{T}B$.
(c) Come va scelto X affinché il quadrilatero $TA'XB'$ sia circoscrivibile ad un cerchio?

2. Un numero reale x si dice *razionale* se $x=\frac{a}{b}$, dove a, b sono interi ($b \neq 0$).

(a) Dimostrare che lo sviluppo decimale di un numero razionale è limitato oppure è illimitato periodico.

(b) Dimostrare che, viceversa, ogni numero periodico, limitato o illimitato, è razionale.
(c) Enunciare e dimostrare un criterio che stabilisca, in base al denominatore n, se la frazione $\frac{m}{n}$ (ridotta ai minimi termini) ha sviluppo decimale limitato o illimitato periodico.
(d) Si consideri il numero reale $s = 0{,}101001000100001\ldots$, dove le cifre sono tutti 0 e 1 ed il numero di 0 tra due 1 consecutivi aumenta ogni volta di una unità. Dimostrare che s è un numero irrazionale.

3. Abbiamo a disposizione piastrelle quadrate di due colori: rosso e blu.

(a) Mostrare che vi sono 2^7 modi per formare una fila di 8 piastrelle, in modo che vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
(b) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento rettangolare formato da 7 file di 8 piastrelle ciascuna, tali che in ogni fila da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
(c) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento 8×8 privato di una piastrella in un angolo, tali che in ogni riga ed in ogni colonna vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
(d) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento 8×8, tali che in ogni riga ed in ogni colonna vi sia un numero dispari di piastrelle blu.

2. SOLUZIONI

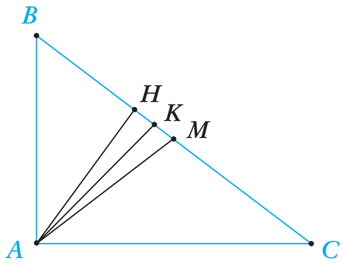
A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. È più semplice calcolare la probabilità che il prodotto *non* sia multiplo di 3, cioè che nessuno dei numeri ottenuti sia 3 oppure 6. Gli esiti possibili per ciascun dado sono quattro su sei, e la probabilità complessiva si ottiene moltiplicando: $4/6 \cdot 4/6 \cdot 4/6 = 8/27$. La probabilità che il prodotto sia multiplo di 3 è allora $1 - 8/27 = 19/27$, e la risposta corretta è (D).

2. Solo una delle risposte può essere vera, ed è necessario escludere ogni risposta da cui se ne possa ricavare almeno un'altra.
Ora, se x e y sono numeri positivi, le affermazioni (A) e (D) sono equivalenti; inoltre, raddoppiando un numero positivo si ottiene un numero maggiore, quindi da (B) si ricava (A) e da (E) si ricava (D). Abbiamo scartato quattro delle cinque risposte possibili, e rimane solo (C), che è la risposta corretta.

3. La risposta corretta è (B). Se $10n$ è un multiplo di 11, allora anche n è un multiplo di 11, e le sue due cifre sono quindi uguali. Inoltre, la somma dei quadrati delle due cifre (uguali) è divisibile per 5 e questo accade solo se le cifre sono entrambe uguali a 5. Si controlla ora facilmente che $10 \cdot 55 = 11 \cdot (5^2 + 5^2)$.

4. La risposta corretta è (A).



Come in figura, indichiamo con H, K, M i piedi di altezza, bisettrice e mediana rispettivamente. Per il teorema di Pitagora, l'ipotenusa BC è lunga 50. Utilizzando il teorema di Euclide si vede che le lunghezze di BH e HC sono 18 e 32 rispettivamente. È noto che le lunghezze dei segmenti staccati dalla bisettrice di un angolo in un triangolo sono proporzionali alle lunghezze dei lati adiacenti. Pertanto BK e KC sono lunghi 150/7 e 200/7 rispettivamente. Ricordando che la mediana divide l'ipotenusa in due segmenti di uguale lunghezza, concludiamo che i quattro segmenti individuati sull'ipotenusa hanno lunghezze:

$$\overline{BH} = 18, \ \overline{HK} = \frac{24}{7}, \ \overline{KM} = \frac{25}{7}, \ \overline{MC} = 25.$$

5. La risposta esatta è (E). Si tratta di contare i possibili riempimenti della tabella 4×4 in modo che in ciascuna riga ed in ciascuna colonna ci sia al più un 1.
Contiamo quanti riempimenti vi siano contenenti esattamente quattro 1: per la posizione dell'1 nella prima colonna abbiamo quattro possibili scelte. Una volta fissata tale posizione, potremo disporre l'1 della seconda colonna in ciascuna delle tre caselle rimanenti che non appartengono alla stessa riga. Allo stesso modo, vi saranno solo due possibili scelte per la terza colonna, e la posizione dell'1 nella quarta colonna sarà a tal punto obbligata. In totale abbiamo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibili riempimenti. Se la tabella contiene invece tre 1, il conteggio è lievemente più sofisticato: dobbiamo prima scegliere in quali righe ed in quali colonne vadano posti gli 1; per ogni tale scelta rimangono poi $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ riempimenti. Vi sono quattro modi di scegliere 3 righe (o colonne) tra 4. Il numero di possibili riempimenti è quindi $4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$. Nel caso il numero 1 compaia due volte, un simile ragionamento produce come risultato

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 72.$$

Vi sono infine 16 riempimenti (uno per ogni casella della tabella) contenenti un solo 1 ed 1 riempimento totalmente privo di 1. In totale si hanno: $24 + 96 + 72 + 16 + 1 = 209$ possibilità distinte.

6. La risposta corretta è (C). Se il rapporto di proporzionalità tra due figure simili è k, i rapporti tra le aree ed i volumi corrispondenti sono rispettivamente k^2 e k^3. Due dodecaedri regolari sono senz'altro simili, e se il rapporto tra aree corrispondenti è 8, il rapporto di proporzionalità lineare è $\sqrt{8}$, mentre quello tra i volumi è $\left(\sqrt{8}\right)^3 = 16\sqrt{2}$. Se $V'' = \sqrt{10}$, allora $V' = V'' \cdot 16\sqrt{2} = 32\sqrt{5}$.

7. Per mostrare che la risposta corretta è (E), è sufficiente esibire una progressione aritmetica di lunghezza arbitrariamente grande costituita da soli inversi di numeri naturali. È facile verificare che

$$\frac{1}{m!}, \frac{2}{m!}, \ldots, \frac{m-1}{m!}, \frac{m}{m!}$$

è una tale progressione aritmetica di lunghezza m: ciascun numeratore compare infatti nel prodotto che definisce il fattoriale a denominatore, e si può semplificare. Ad esempio, se $m = 4$, si ottiene

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}.$$

8. La risposta corretta è (C). Calcolando i primi valori della successione si nota che $A_3 = A_7 = A_{11} = 0$, e ci si convince facilmente che ogni quaterna di termini consecutivi nella successione si ottiene da quella precedente moltiplicando per -4. Pertanto tutti i termini del tipo A_{4n+3} sono nulli, e A_{2007} è uno di essi.
Per fornire una dimostrazione corretta a questo convincimento euristico, si può procedere come segue: se $A_k = 0$, indichiamo con a il valore di A_{k-1}. Dal momento che $0 = A_k = A_{k-1} - (A_{k-2} + \ldots + A_1 + A_0)$, la somma dei termini fino ad A_{k-2} è uguale ad a. Questo facilita molto il calcolo degli elementi successivi:

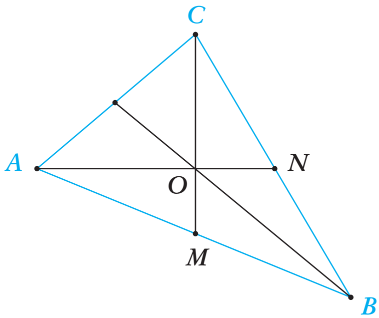
$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_k - (A_{k-1} + \ldots + A_0) = 0 - (a + a) = -2a,\\
A_{k+2} &= A_{k+1} - (A_k + A_{k-1} + \ldots + A_0) = -2a - (0 + a + a) = -4a,\\
A_{k+3} &= A_{k+2} - (A_{k+1} + A_k + A_{k-1} + \ldots + A_0) = -4a - (-2a + 0 + a + a) = -4a,\\
A_{k+4} &= A_{k+3} - (A_{k+2} + A_{k+1} + A_k + A_{k-1} + \ldots + A_0) =\\
&= -4a - (-4a - 2a + 0 + a + a) = -4a + 4a = 0.
\end{aligned}$$

Quindi se $A_k = 0$, allora $A_{k+4} = 0$, e gli zeri si ripetono ogni quattro termini. Basta ora osservare che $2007 = 4 \cdot 501 + 3$ per concludere che $A_{2007} = A_3 = 0$.

9. Le corde di lunghezza massima in un cerchio sono i diametri, quindi la somma delle lunghezze è certamente minore o uguale a 4, e tale valore è effettivamente raggiungibile scegliendo due diametri tra loro ortogonali.

Supponiamo invece fissata la corda AC. Per scegliere BD di lunghezza minima tra le corde ortogonali ad AC è necessario che le due corde si intersechino in un comune estremo; in altre parole, che formino i due cateti di un triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza. Ma per la disuguaglianza triangolare, la lunghezza dell'ipotenusa, che è un diametro, è minore o uguale alla somma delle lunghezze dei due cateti. Questo mostra che la somma delle lunghezze delle due corde è strettamente maggiore di 2. È facile scegliere A, B, C, D in modo che la somma delle lunghezze sia arbitrariamente vicina a tale valore. La risposta corretta è quindi (B).

10. La risposta corretta è (C). Le tre mediane dividono il triangolo in sei triangoli equivalenti. L'area del triangolo ABC è quindi il triplo di quella del triangolo AOC delimitato dalle mediane AN e CM e dal lato AC, come in figura.



La lunghezza dei segmenti OA ed OC è pari ai due terzi di quella delle mediane AN e CM rispettivamente. L'area del triangolo AOC è massima quando le due mediane sono ortogonali tra loro. Se $\overline{AN} = 10, \overline{CM} = 12,$ allora $\overline{OA} = 2/3 \cdot \overline{AN} = 20/3$ e $\overline{OC} = 2/3 \cdot \overline{CM} = 8.$ L'area di AOC è quindi $1/2 \cdot 20/3 \cdot 8 = 80/3$ e l'area di ABC è il triplo di quella di AOC, cioè è uguale ad 80.

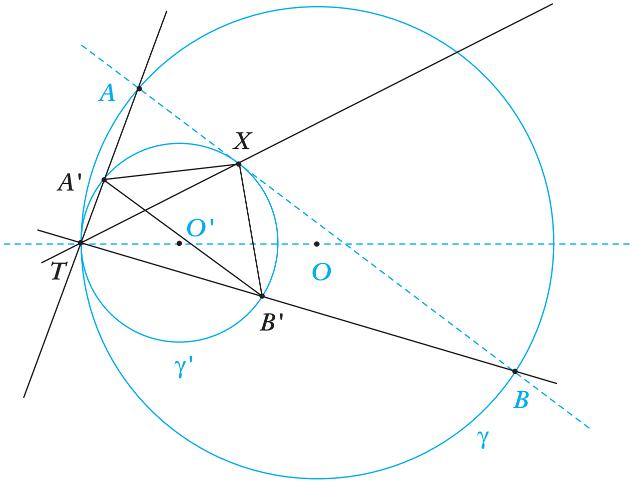
B) PROBLEMI

1.

(a) L'omotetia ϕ di centro T che porta γ' in γ porta anche A' in A e B' in B. Ma allora i segmenti $A'B'$ e AB si corrispondono in tale omotetia, e sono pertanto paralleli.

(b) Gli archi $A'X$ e XB' sono uguali per il parallelismo dimostrato nel punto (a): infatti, il diametro passante per X è perpendicolare alla corda $A'B'$ e la divide in parti uguali. Quindi gli angoli $A\hat{T}X$ e $B\hat{T}X$ sono uguali, poiché insistono su archi uguali.

(c) Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile ad una circonferenza è che le somme dei lati opposti siano uguali. Poiché $A'X$ e $B'X$ hanno la stessa lunghezza, X va scelto in modo che $A'T$ e $B'T$ abbiano la stessa lunghezza, il che succede esattamente quando X appartiene al diametro di γ che contiene T.



Questo si può vedere in molti modi: ad esempio, se il triangolo $TA'B'$ è isoscele in T, allora la bisettrice TX è anche l'altezza relativa al lato $A'B'$, cioè è perpendicolare ad AB; ma allora deve contenere il centro O' di γ', ed i punti T, X, O' devono essere allineati.

2.

(a) Supponiamo per semplicità che x sia positivo e minore di uno, in modo che $x = a/b$ con $a < b$ interi positivi. Quando eseguiamo l'usuale algoritmo per calcolare l'espansione decimale del quoziente tra a e b, ogni resto intermedio determina completamente l'ordine in cui si presentano le cifre successive, nonché i resti successivi. In altre parole, se in due punti della divisione si ottiene lo stesso resto, da quel momento in poi le successioni di resti e di cifre saranno le stesse.
Ciascun resto è un numero intero compreso tra 0 e $b - 1$. A meno che la divisione termini in un numero finito di passi, nel qual caso si ottiene un numero decimale limitato, almeno uno dei resti dovrà ripetersi. Per quanto detto, le cifre corrispondenti saranno uguali, e l'espansione decimale sarà quindi periodica.

(b) Un numero decimale limitato si scrive sempre come rapporto tra un numero intero ed una potenza di dieci, ed è pertanto razionale. Sia invece x un numero con espansione decimale periodica illimitata. Possiamo certamente supporre, a meno di moltiplicarlo per un'opportuna potenza di dieci, che il periodo di x inizi subito dopo la virgola. Se tale periodo è composto da esattamente d cifre, allora x e $10^d \cdot x$ possiedono la stessa successione di cifre dopo la virgola: in altre parole, la loro differenza è un intero.
Pertanto, $(10^d - 1)x$ è un intero, e quindi x è razionale.

(c) Abbiamo già visto come ogni numero decimale limitato si possa esprimere come rapporto di un numero intero con una potenza di dieci. Una volta ridotta tale frazione ai minimi termini, gli unici primi nella fattorizzazione del denominatore saranno 2 e 5.

È vero anche viceversa: una frazione con numeratore e denominatore interi nella quale 2 e 5 siano gli unici primi a comparire nella fattorizzazione del denominatore fornisce un numero decimale limitato. È sufficiente moltiplicare opportunamente numeratore e denominatore per lo stesso numero, in modo da ottenere a denominatore una potenza di 10.

(d) Si tratta di stabilire se l'espansione decimale data sia periodica o meno. Supponiamo per assurdo che lo sia: allora il periodo ha una data lunghezza d. Ma andando sufficientemente avanti nella successione delle cifre di s si trovano almeno $2d$ zeri consecutivi. Pertanto il periodo di lunghezza d deve essere composto da d cifre tutte uguali a zero, e come conseguenza s è un numero decimale limitato, da cui l'assurdo. Pertanto s non è periodico, ed è quindi irrazionale.

3.

(a) Ogni fila di 8 piastrelle delle quali un numero dispari sia blu è completamente determinata dal colore delle prime 7: se infatti tra le prime 7 le blu sono in numero dispari, l'ottava sarà rossa; viceversa, se delle prime 7 le blu sono in numero pari, l'ottava dovrà essere blu. Il numero di modi possibili di formare una fila di 8 piastrelle con la proprietà data è allora uguale al numero di possibili modi di formare una fila di 7 piastrelle, senza ulteriori richieste. Poiché ogni piastrella può essere di due colori, le possibilità sono 2^7.

(b) Ciascuna fila può essere costruita, indipendentemente dalle altre, in 2^7 modi. Complessivamente, le 7 file possono essere costruite in $(2^7)^7 = 2^{49}$ maniere.

(c) Per ogni modo di piastrellare un quadrato 7×7, vi è un'unica maniera di aggiungere una piastrella per ognuna delle 7 righe e per ognuna delle 7 colonne in modo che il numero delle piastrelle blu sia dispari. Le possibili colorazioni sono quindi 2^{49}.

(d) Supponiamo di avere una piastrellazione come nel punto (c). Le piastrelle nell'ottava riga sono rosse quando nella colonna al di sopra il numero delle piastrelle blu è dispari, e sono blu altrimenti. Il colore nell'ottava riga è quindi un'indicazione della parità delle piastrelle blu nelle colonne del quadrato 7×7. Il numero di piastrelle rosse nell'ottava riga sarà quindi dispari (rispettivamente pari) se il numero complessivo di piastrelle blu nel quadrato 7×7 è dispari (risp. pari). Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per le piastrelle dell'ottava colonna.
Come conseguenza, la parità del numero di piastrelle rosse (risp. blu) nell'ottava riga e nell'ottava colonna è la stessa. In conclusione è sempre possibile completare il quadrato 8×8 in modo che anche nell'ottava riga e nell'ottava colonna ci sia un numero dispari di piastrelle blu. Pertanto, il numero di colorazioni consentite è uguale al numero di colorazioni possibili di un quadrato 7×7, che è pari a 2^{49}.

Alessandro D'Andrea
Dipartimento di Matematica
Università di Roma «La Sapienza»
dandrea@mat.uniroma1.it