INdAM

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio e 2 borse aggiuntive
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2015/2016.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema nell'apposito foglio.
È ammesso l'uso di riga e compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

Si ricorda che è proibito, a pena di esclusione, scrivere il proprio nominativo o altri segni di riconoscimento nei fogli contenenti il testo o lo svolgimento della prova; il nominativo va riportato esclusivamente nell'apposita busta piccola che dovrà essere sigillata.
Si fa inoltre presente che le domande della prova non sono disposte in ordine di difficoltà.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) Il piccolo Isacco e suo padre Galileo salgono su una grande ruota panoramica, che ha 10 metri di raggio e gira a velocità costante con periodo di rotazione di 2 minuti. Appena i due si sono accomodati in vettura, nei posti collocati più in basso, la ruota inizia a girare, precisamente alle ore 12. Il piccolo ha con sé un palloncino gonfiabile, preso a una bancarella. Il padre gli spiega: "nelle condizioni attuali, lasciando libero il palloncino mentre la ruota gira, esso sale alla velocità di 30 metri al minuto, perfettamente in verticale". Poco dopo la partenza, a Isacco sfugge il palloncino e scoppia a piangere, ma il padre, controllando l'orologio, lo rincuora: "non ti preoccupare, fra poco lo riprendiamo".
A che ora è volato via il palloncino?

A. $12:00:10$ B. $12:00:00$ C. $12:00:20$
D. $12:00:15$ E. $12:00:30$

(2) Stabilire quanti sono i numeri interi n, con $0 \leqslant n \leqslant 1023$, nella cui rappresentazione binaria non compaiono sequenze di 3 cifre consecutive uguali a 1.

A. 512 B. 484 C. 576
D. 504 E. 511

(3) Il tetraedro $ABCD$ ha tutti i sei spigoli tangenti a una stessa sfera.
Sappiamo che $\overline{AB} = 323$, $\overline{BC} = 406$, $\overline{CA} = 385$, $\overline{DA} = 524$. Qual è la misura di BD?

A. 528 B. 487 C. 545
D. 533 E. 503

(4) Sia $\mathcal{R}$ un poligono regolare di 2015 lati. Tracciando 2012 diagonali, in modo che non vi siano punti di intersezione interni a $\mathcal{R}$, esso resta suddiviso in 2013 triangoli. Di tali 2013 triangoli, quanti saranno quelli ottusangoli?

A. tutti quanti (2013)
B. sicuramente 2011
C. un numero tra 1007 e 2010 (estremi inclusi)
D. meno di 1007
E. sicuramente 2012

(5) Un pastore ha un appezzamento di terreno delimitato su un lato da un muretto di pietra rettilineo, lungo 100 metri. Vuole costruire un recinto rettangolare per le sue pecore, utilizzando una parte del muro come uno dei lati del rettangolo e 40 metri di rete metallica per gli altri tre lati.
Qual è l'area massima del terreno che può recintare?

A. $240\ \mathrm{m}^2$
B. $200\ \mathrm{m}^2$
C. $100\ \mathrm{m}^2$
D. $160\ \mathrm{m}^2$
E. $180\ \mathrm{m}^2$

(6) In un'isola vivono in tutto 2015 persone, che sono di due tipi diversi: i cavalieri che dicono sempre la verità ed i furfanti che mentono sempre. Si sa che durante un grande banchetto, al quale partecipavano oltre 1000 persone disposte attorno ad un grande tavolo circolare, ciascuno dei presenti ha affermato: "i miei due vicini di tavolo sono di due tipi differenti". Sulla base di questa informazione, quanti possono essere, al massimo, i cavalieri che vivono nell'isola?

A. 1589
B. 1597
C. 1014
D. 1681
E. 1697

(7) Date due circonferenze α e β, secanti nei punti S e T, sia r la retta passante per S e T.
Preso un punto P di r, esterno al segmento ST, si conducono da tale punto le due rette tangenti alla circonferenza α (che la toccano nei punti A' e A'') e le due tangenti a β (che la toccano nei punti B' e B'').
Sapendo che l'angolo $A'\widehat{B'}A''$ è di $101°$, qual è l'ampiezza di $A''\widehat{B''}A'$?

A. non bastano questi dati a determinarlo
B. $87°$
C. $90°$
D. $101°$
E. $79°$

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) I centri di tre sfere di raggio 1 cm sono i vertici di un triangolo equilatero di lato 9 cm.
Quanti sono i piani tangenti a tutte e tre le sfere?

(9) È dato il polinomio $p(x) = x^2 + bx + c$ (con b e c numeri reali).
Si sa che $p(p(1)) = p(p(2)) = 0$ e che $p(1) \neq p(2)$. Qual è il valore di $p(5)$?

(10) Tra gli anagrammi della parola CESPUGLI, quanti sono quelli dove le prime quattro lettere che compaiono sono disposte in ordine alfabetico?

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, **motivando adeguatamente le risposte**.
Una proposizione contenuta nel testo di un problema, della quale sia richiesta la dimostrazione, può comunque essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta.
Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Ricordiamo che per *terna pitagorica* si intende una terna di numeri interi positivi (a, b, c) per i quali si abbia $a^2 + b^2 = c^2$.

(a) Dimostrare che esistono infinite terne pitagoriche.

(b) Dimostrare che ogni intero positivo può comparire solo in un numero finito di terne pitagoriche.

(c) Dimostrare che, per ogni numero naturale dispari $a > 1$, esiste un'unica terna pitagorica (a, b, c), dove b e c sono consecutivi.

(2) Si sa che i lati di un quadrilatero convesso $ABCD$ hanno le seguenti misure:
$\overline{AB} = 39$, $\overline{BC} = 52$, $\overline{CD} = 60$, $\overline{DA} = 25$. Inoltre l'angolo in B è retto.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile ma non circoscrivibile a una circonferenza.

(b) Determinare i raggi delle circonferenze inscritte nei triangoli ABC e CDA.

(c) Detti H e K i punti di tangenza della diagonale AC con tali circonferenze, stabilire la misura di HK.

(3) Dato un poligono regolare $\mathcal{P}$ avente 101 lati, indichiamo, in senso orario, i suoi vertici con V_0, V_1, V_2, ... , V_{99}, V_{100}. Si tracciano le 101 diagonali V_0V_{31}, V_1V_{32}, V_2V_{33}, e così via, sempre procedendo di 31 passi, fino a $V_{100}V_{30}$.

(a) Partendo da V_0 e procedendo da vertice a vertice in senso orario lungo le diagonali tracciate, quante diagonali si saranno percorse quando si tornerà in V_0 per la prima volta?

(b) Esistono punti interni a $\mathcal{P}$ per cui passano tre delle diagonali tracciate?

(c) Quanti sono in tutto i punti di intersezione interni a $\mathcal{P}$ tra le varie diagonali tracciate?

(d) Indicando, per $n \geqslant 3$, con R_n il numero di regioni aventi n lati che si sono ottenute in $\mathcal{P}$ dopo aver tracciato le varie diagonali, stabilire tutti i valori R_3, R_4, R_5, R_6, etc. (**senza dimostrazione**).

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1.	A	B	C	D	E
Quesito 2.	A	B	C	D	E
Quesito 3.	A	B	C	D	E
Quesito 4.	A	B	C	D	E
Quesito 5.	A	B	C	D	E
Quesito 6.	A	B	C	D	E
Quesito 7.	A	B	C	D	E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8.	
Quesito 9.	
Quesito 10.	

Qualora il candidato intenda modificare una risposta già data, è necessario che indichi senza ambiguità la risposta effettivamente scelta (o eventualmente la volontà di non dare alcuna risposta).