Istituto Nazionale di Alta Matematica *F. Severi*

Prova scritta del 27 marzo 2012

Concorso a 7 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate
a iscritti ai corsi di Laurea Specialistica o Magistrale in Matematica

Istruzioni per la prova. E' vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati e chiudere il plico.
Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula

$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

Importante. NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato.

ESERCIZI GRUPPO A

Esercizio A1. Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sia munito del prodotto scalare canonico. Si consideri il gruppo G delle isometrie che trasformano il sottospazio $U := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x = y,\; z = w\}$ in se stesso.
i. (5 punti) Si scelga in G un elemento la cui traccia è uguale a 2 e il cui unico vettore fisso risulta essere quello nullo, dandone esplicite equazioni rispetto alla base canonica.
ii. (3 punti) Dato g in G, si mostri che se il determinante di g non è positivo, allora g fissa infiniti vettori di $\mathbb{R}^4$.
iii. (4 punti) Si stabilisca per quali numeri n naturali il numero $\rho(n)$ degli elementi g di G tali che $g^n = Id$ risulta essere finito. Per tali interi n si determini quindi il valore di $\rho(n)$.

Esercizio A2. Indicato con $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi in una indeterminata, di grado minore o uguale a 2 con coefficienti in $\mathbb{R}$, si consideri l'applicazione $\rho : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ definita da $p \to p(-1)^2 + p(0)^2 - p(1)^2$.
i. (4 punti) Mostrare che ρ è una forma quadratica su $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e calcolarne la segnatura.
ii. (4 punti) Si determini una base che diagonalizza ρ.
iii. (4 punti) Si classifichi la conica definita da $\mathscr{C} = \{\rho = 0\} \cap \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \;: b = 0\}$.

Esercizio A3. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$ si consideri il sottoinsieme S ottenuto ruotando intorno all'asse $\{x = y = 0\}$ la curva parametrizzata da

$$\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{E}^3, \quad t \to (t, 0, 4 + 4t^2 - t^4).$$

i. (4 punti) Si mostri che S risulta essere il supporto di una superficie regolare esibendo un atlante di parametrizzazioni regolari.
ii. (4 punti) Si classifichino tutti i punti di S e si calcolino, in un unico punto p di S scelto a piacere,

le due curvature principali e le equazioni cartesiane di una geodetica per p tangente ad una delle direzioni principali.
iii. (4 punti) E' vero che l'insieme dei punti parabolici di S è un retratto (forte) di deformazione di $\tilde{S} := \{(x, y, z) \in S \ : \ 0 \neq x^2 + y^2 \neq 1\}$? Si motivi la risposta.

Esercizio A4. Si denoti con τ la topologia cofinita sull'intervallo $[0,1]$ e con $\tau \times \tau$ la topologia prodotto su $[0,1]^2$.
i. (4 punti) Si provi che $\tau \times \tau$ è più fine della topologia cofinita su $[0,1]^2$ e si stabilisca se $([0,1]^2, \tau \times \tau)$ è compatto e/o connesso.
ii. (4 punti) Posto $C := \{(x, y) \in [0,1]^2 : y = x^2\}$, si determini l'interno, l'esterno, la frontiera e la chiusura di C rispetto a $\tau \times \tau$.
iii. (4 punti) Si caratterizzino le funzioni continue da $([0,1]^2, \tau \times \tau)$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio A5. Siano K un campo finito con q elementi, $GL_n(K)$ il gruppo delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti in K e $SL_n(K)$ il sottogruppo delle matrici di $GL_n(K)$ con determinante uguale a 1.
i. (6 punti) Determinare le cardinalità di $GL_n(K)$ e di $SL_n(K)$.
ii. (6 punti) Indicato con N il sottoinsieme di $SL_n(K)$ delle matrici scalari (ovvero del tipo λId, con $\lambda \in K$, appartenenti a $SL_n(K)$), si mostri che N è un sottogruppo normale di $SL_n(K)$ e si determini la cardinalità del gruppo quoziente $SL_n(K)/N$ (suggerimento: si ricordi che $K \setminus \{0\}$ è ciclico).

Esercizio A6. Sia $G_1 \times G_2$ il prodotto diretto di due gruppi G_1 e G_2 e siano $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$ e $\pi_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$ le due proiezioni canoniche. Un gruppo G si dice un *prodotto sottodiretto* di G_1 e G_2 se e solo se esiste un omomorfismo iniettivo $\varphi : G \to G_1 \times G_2$ tale che entrambi gli omomorfismi $(\pi_1 \circ \varphi) : G \to G_1$ e $(\pi_2 \circ \varphi) : G \to G_2$ sono suriettivi.
i. (3 punti) Dimostrare che G è un prodotto sottodiretto di due gruppi G_1 e G_2 se e solo se esistono due sottogruppi normali $N_1 \trianglelefteq G$ e $N_2 \trianglelefteq G$ tali che $G/N_1 \cong G_1$, $G/N_2 \cong G_2$, e $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, dove e indica l'elemento neutro di G.
ii. (5 punti) Usando i, dimostrare che, se G è un gruppo finito con almeno due elementi, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) per ogni realizzazione di G come prodotto sottodiretto di due gruppi G_1 e G_2, accade che G è isomorfo a G_1 oppure a G_2,

(b) esiste un sottogruppo normale non banale di G che è contenuto in ogni sottogruppo normale non banale di G.

iii. (4 punti) Dimostrare che, dato un gruppo finito H con almeno due elementi, per ogni elemento $h \in H \setminus \{e\}$, esiste un sottogruppo normale N di H tale che $h \notin N$ e $G = H/N$ soddisfa la condizione (b) in ii (suggerimento: scegliere N massimale fra i sottogruppi normali di H che non contengono h).

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio B1. Sia $F(x)$ una funzione non negativa di classe $C^2(\mathbb{R})$ nulla solo nel punto $x = 0$, posto $f(x) = F'(x)$, si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$(P) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(y) - f(x) \\ \dot{y} = f(x) - f(y) \end{cases}$$

i. (6 punti) si dimostri che l'origine $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile di (P)
ii. (6 punti) si dimostri che l'origine $(0,0)$ non è asintoticamente stabile.

Esercizio B2. Sia $\mathcal{K} = \{C = [a_C, b_C] \subseteq \mathbb{R}\}$, l'insieme dei segmenti chiusi e limitati dell'asse reale, e dati C e D due punti di $\mathcal{K}$ si ponga $\delta(C, D) = \max\{|a_C - a_D|, |b_C - b_D|\}$, allora
i. (4 punti) si provi che $(\mathcal{K}, \delta)$ è uno spazio metrico
ii. (3 punti) si mostri che $T_\varepsilon : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $T(C) = \varepsilon C = \{\varepsilon x : x \in C\}$ è una contrazione, se e solo se $\varepsilon \in (0,1)$
iii. (2 punti) si identifichi il punto fisso della contrazione
iv. (3 punti) esistono insiemi di $E \subseteq \mathbb{R}$ invarianti sotto l'azione dell'applicazione T_ε?
Si ricordi che E è invariante rispetto l'azione dell'applicazione se $T_\varepsilon(E) = E$.

Esercizio B3. Ad un esame partecipano X studenti uomini e Y studenti donne. X e Y sono variabili aleatorie di Poisson indipendenti, rispettivamente di parametri $\lambda = 40$ e $\lambda = 30$ (si ricordi che $P(X = r) = e^{-\lambda}\lambda^r / r!$). Le donne superano, indipendentemente l'una dall'altra, l'esame con probabilità $2/3$ mentre gli uomini, indipendentemente l'uno dall'altro, superano l'esame con probabilità $1/2$.
i. (3 punti) Calcolare la probabilità che almeno 5 studenti (uomini o donne) sostengano l'esame.
ii. (3 punti) Calcolare la probabilità che superino l'esame esattamente 15 donne.
iii. (3 punti) Calcolare quanti studenti (uomini e donne) - in media - superano l'esame.
iv. (3 punti) Sapendo che l'esame è stato superato da 20 studenti, calcolare la distribuzione del numero di studenti uomini che hanno superato l'esame.

Esercizio B4. Dato il seguente sistema di successioni per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \left(\gamma w_n - \beta x_n w_n\right) \\ w_{n+1} = w_n - \left(\gamma w_n - \beta x_n w_n\right) \\ x_0 = 1 - \varepsilon \quad w_0 = \varepsilon \end{cases}$$

dove $\gamma, \beta, \varepsilon \in (0,1)$, si provino le seguenti affermazioni
i. (2 punti) $(x_n + w_n)$ è costante rispetto ad $n \in \mathbb{N}$
ii. (3 punti) $x_n, w_n > 0$ per ogni n
iii. (3 punti) se $\gamma > \beta$, allora w_n è decrescente ed infinitesima
iv. (4 punti) se $\beta > \gamma$, allora x_n converge a γ/β.

Esercizio B5. Sia $K_{H,R} = \left\{0 \le z \le H, x^2 + y^2 \le R^2\right\}$ un cilindro in $\mathbb{R}^3$ contenente una certa quantità di massa distribuita secondo la densità $m(x, y, z) = e^{-az^2 - b(x^2+y^2)}$. All'interno della classe dei cilindri di superficie laterale assegnata $2\pi\Sigma_0$, si determinino le dimensioni di tutti i cilindri che massimizzano la funzione massa totale, nei seguenti casi
i. (3 punti) $a = b = 0$
ii. (4 punti) $a = 0$, $b > 0$
iii. (5 punti) $a, b > 0$.

Esercizio B6. Sia $X = C^0([0,1],[0,1])$, cioè l'insieme delle funzioni continue su $[0,1]$ a valori in $[0,1]$), si provi che
i. (4 punti) (X, δ) con la distanza $\delta(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$ non è completo.
ii. (4 punti) (X, d) con la distanza $d(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ è uno spazio metrico completo non compatto.
iii. (4 punti) l'applicazione $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ è continua in (X, τ), dove τ è la topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni D_p $(D_p(f) = f(p))$, per $p \in [0,1]$.