Istituto Nazionale di Alta Matematica *F. Severi*

Prova scritta del 18 marzo 2010

Concorso a 6 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate
a iscritti ai corsi di Laurea Specialistica o Magistrale in Matematica

Istruzioni per lo svolgimento della prova
Il tempo a disposizione è di 3.5 ore; è vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi dei gruppi A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula

$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati e chiudere il plico.
IMPORTANTE: NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento in alcuna parte dell'elaborato.

Esercizi gruppo B

Esercizio 1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ determinato dai suoi generatori $\{(1,1,0,1),(0,1/5,0,1/5)\}$ e sia V definito da $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \ : \ x_1+x_2-2x_3=0\}$.
i.(3 punti) Si indichi una base di $U\cap V$ e la si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$.
ii.(4 punti) Si scelga un endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che $F(U)\subset V$, $U\subset F(V)$, $F^2=Id$ e se ne determini la matrice associata rispetto alla base canonica.
iii.(5 punti) Si mostri che la condizione $F^2=Id$ implica che F e' diagonalizzabile.

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica di $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x^2-2y^2+4xz+3z^2$.
i.(3 punti) Determinare la segnatura della forma simmetrica associata.
ii.(4 punti) Indicare una matrice ortogonale che la diagonalizza.
iii.(5 punti) Stabilire se la quadrica associata è isometricamente e/o affinemente equivalente alla quadrica di equazione $\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}xz+\frac{1}{2}yz=0$.

Esercizio 3. Sull'insieme $X := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2<5\}$ si consideri la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^3$. Definita su X la relazione di equivalenza

$$(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x',y',z') \quad \text{se e solo se esiste un reale positivo } t \text{ tale che } z'=tz,$$

si consideri lo spazio topologico quoziente $X/\mathcal{R}$.
i.(3 punti) Stabilire se $X/\mathcal{R}$ è Hausdorff e/o compatto.
ii.(4 punti) Stabilire se la proiezione canonica $\Pi : X\to X/\mathcal{R}$ è aperta e/o chiusa.
iii.(5 punti) Si descrivano tutte le funzioni continue su $X/\mathcal{R}$ a valori reali.

Esercizio 4. Sia assegnata la curva dello spazio euclideo con rappresentazione parametrica $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ definita da $\alpha(t) := (\sqrt{3}\cosh t,\ \sqrt{2}(\cosh t+\sinh t),\ \cosh t - 2\sinh t)$.

i.(4 punti) Stabilire se la rappresentazione è regolare e, in caso affermativo, per lunghezza d'arco. Fornire equazioni parametriche e cartesiane della retta normale per $\alpha(0)$.
ii.(4 punti) Determinarne curvatura e torsione.
iii.(4 punti) Esiste un movimento rigido che trasforma tale curva in quella di rappresentazione parametrica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) := (\sqrt{2}(\cosh t + \sinh t), \sqrt{3}(\cosh t - \sinh t), \cosh t + \sinh t)$? È un'isometria inversa? Motivare la risposta.

Esercizio 5. Nel gruppo S_6 delle permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si consideri l'insieme H degli elementi che lasciano invariato il sottoinsieme $\{2, 5, 6\}$.
i.(3 punti) Si mostri che H è un sottogruppo non normale di S_6.
ii.(4 punti) Si determini la cardinalita' di H e i periodi dei suoi elementi.
iii.(5 punti) Si determinino, a meno di isomorfismo, tutti i sottogruppi abeliani di H.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{Q}(u)$ l'estensione di campo ottenuta aggiungendo a $\mathbb{Q}$ l'elemento $u = \sqrt{1 + \sqrt{7}}$ e si denoti con p_u il polinomio minimo di u.
i.(3 punti) Si determini p_u e si scriva u^{-1} in forma normale, ovvero come combinazione lineare di potenze positive di u.
ii.(4 punti) Indicato con $(x^4 + 4)$ l'ideale di $\mathbb{Q}[x]$ generato dal polinomio $x^4 + 4$, si stabilisca se $\mathbb{Q}(u)$ e l'anello $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + 4)$ sono isomorfi.
iii.(5 punti) Determinare gli eventuali valori di $a \in \mathbb{Q}$ tali che la classe di $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + 4)$ rappresentata dal polinomio $x + a$ sia un divisore dello zero.

1 Gruppo A

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
i.(4 punti) dimostrare che $|f'(x)| \leq (2f(x)\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|)^{1/2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
ii.(8 punti) enunciare una disuguaglianza analoga per funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soluzione. i. Essendo la funzione di classe C^2 possiamo scrivere che

$$0 \leq f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(p)h^2 \leq f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}|f''(p)|h^2,$$

con $p \in \mathbb{R}$. L'ultimo membro della precedente disuguaglianza è una funzione quadratica in h non negativa e può essere riscritta come segue

$$0 \leq f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}\sup_{p\in\mathbb{R}} |f''(p)|h^2,$$

il minimo di tale quantità è assunto nel vertice della parbola per $h = -f'(x)/\sup_{p\in\mathbb{R}} |f''(p)|$, sostituendo tale valore troviamo

$$0 \leq f(x) - \frac{|f'(x)|^2}{2\sup_{p\in\mathbb{R}} |f''(p)|},$$

ovvero

$$|f'(x)|^2 \leq 2f(x)\sup_{p\in\mathbb{R}} |f''(p)|,$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 2. Siano f_n, $n \in \mathbb{N}$, funzioni continue definite su $[0, 1]$ a valori in $\mathbb{R}$. Si consideri la funzione g definita da

$$g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\ , x \in [0, 1],$$

i.(5 punti) g è una funzione continua?
ii.(3 punti) Dimostrare che se $\exists L > 0 : |f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y| \forall x, y \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, allora anche g verifica la stessa disuguaglianza,
iii.(4 punti) dimostrare che se tutte le f_n sono concave anche g è concava.

Soluzione.

Esercizio 3. Sia $U(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$, con $x \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$,
i.(4 punti) si provi che $U \in C^2(\mathbb{R})$ e si calcoli $U''(x)$,
ii.(2 punti) si determini il problema di Cauchy di cui U è l'unica soluzione,
iii.(6 punti) si determini la funzione h in modo che $W(x) = \int_0^x h(x-t)f(t)\,dt$ sia la soluzione di

$$\begin{cases} W''(x) - W(x) = f(x) \\ W(0) = 0 \quad W'(0) = 0 \end{cases}.$$

Soluzione. i. Osserviamo subito che, essendo la funzione f continua in tutto $\mathbb{R}$ la funzione integranda risulta essere continua, perché prodotto di funzioni continue. Quindi, per ogni x fissato, l'integrale è ben definito perché le funzioni continue in intervalli limitati sono integrabili secondo Riemann. Per calcolare le derivate richieste possiamo far ricorso al teorema fondamentale del calcolo integrale, visto che la funzione integranda è continua, e usando la linearità delle operazioni di derivazione e integrazione e la regola di derivazione di un prodotto abbiamo

$$U'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt\right) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

quindi U' è di classe C^1 per il teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè $U \in C^2(\mathbb{R})$, inoltre, sempre per lo stesso teorema, vale che

$$U''(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x).$$

ii. Ragionando come nel precedente quesito abbiamo che

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x h(x-t)f(t)\,dt = \int_0^x h'(x-t)f(t)\,dt + h(0)f(x),$$

quindi W è derivabile se h è derivabile, e questa ipotesi è sufficiente a poter derivare sotto il segno di integrale. In più, affinché W sia derivabile due volte (senza dover aggiungere ipotesi su f), dobbiamo richiedere che $h(0) = 0$, con queste due richieste abbiamo che

$$W''(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x h'(x-t)f(t)\,dt = \int_0^x h''(x-t)f(t)\,dt + h'(0)f(x),$$

quindi W è di classe C^2, anche se f è solo continua, se h è derivabile due volte e vale 0 in 0. Adesso imponiamo che W sia soluzione dell'equazione differenziale

$$W''(x) - W(x) = \int_0^x \left(h''(x-t) - h(x-t)\right) f(t)\,dt + h'(0)f(x) = f(x),$$

l'equazione è soddisfatta se $h'(0) = 1$ e $h'' - h \equiv 0$, riassumendo i calcoli precedenti abbiamo che h deve essere l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} h''(s) - h(s) = 0 \\ h(0) = 0 \quad h'(0) = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è $h(s) = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s}) = \sinh(s)$. La verifica dei dati iniziali per W è immediata.

Esercizio 4. Si consideri la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = \alpha \end{cases} \qquad \text{con } f(s) = \frac{s^3}{1+s^2},$$

i.(6 punti) si provi che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, x_n tende a 0,
ii.(6 punti) si formulino delle ipotesi su f la validità di i).

Soluzione. i. Ovviamente se $\alpha = 0$non c' è nulla da dimostrare. Osserviamo subito che f è dispari, quindi possiamo limitarci ad affrontare il caso $\alpha > 0$.
Poiché f è crescente e vale che $f(s) = s - s/(1+s^2)$, abbiamo che $f(s) < s$ se $s > 0$ e $f(s) > s$ se $s < 0$. Questo implica che la successione è monotona decrescente, visto che $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ almeno finché

resta positiva, il che è vero visto che $f(s) > 0$ se $s > 0$ e stiamo considerando il caso $\alpha > 0$ e $x_n = f^n(\alpha)$. Quindi abbiamo che la successione è regolare e deve convergere al suo estremo inferiore, la proprietà di segno della f implica che tale estremo è 0, che è l'unico punto fisso della f e quindi l'unico possibile limite finito della successione.
ii. Essenzialmente il modo più semplice per "generalizzare" le idee del punto precedente consiste nel richiedere che la funzione f sia continua, crescente e tale che $f(s) < s$ se $s > 0$ e $f(s) > s$ se $s < 0$. Ovviamente queste ipotesi implicano, come sopra, la monotonia della successione per ricorrenza e la convergenza a 0, l'unico punto fisso dell'applicazione.
Un'altra ipotesi che facilmente produce lo stesso risultato (pur non generalizzando il punto i.) è che f sia una contrazione (cioè che esista $\delta \in (0, 1)$ tale che $|f(x) - f(y)| < \delta|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$) e che $f(0) = 0$.

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $F(x, y) = e^{-y^2}(x^2 - 1)^2$
i.(4 punti) si provi l'esistenza di due punti di minimo locale e di un terzo punto critico di F,
ii.(8 punti) sia $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua che possiede due punti di minimo locale, si trovino almeno due ipotesi diverse su H che garantiscano l'esistenza di un terzo punto critico.

Soluzione.

Esercizio 6. In una città di 5 milioni di abitanti, ogni abitante possiede una rara caratteristica genetica con probabilità $2 \cdot 10^{-7}$ indipendentemente da tutti gli altri. È stato accertato che l'autore di un crimine possiede tale caratteristica. Dopo aver calcolato il valore atteso del numero di abitanti che posseggono tale caratteristica, rispondere alle seguenti domande:
i.(4 punti) sapendo che l'investigatore ha individuato una persona che possiede tale caratteristica, trovare la probabilità che ve ne sia almeno un'altra,
ii.(4 punti) se l'investigatore ha trovato due persone che posseggono tale caratteristica, trovare la probabilità che ve ne sia almeno un'altra,
iii.(4 punti) dire quante persone che possiedono tale caratteristica genetica deve trovare l'investigatore per essere ragionevolmente certo di averle individuate tutte (cioè con probabilità maggiore di $1 - r$, ove r è molto piccolo).

Soluzione. Sia X il numero di individui che posseggono la caratteristica. X ha distribuzione binomiale di parametri 10^7 e 10^{-7}. Quindi $\mathbb{E}(X) = 1$.
i.

$$\mathbf{P}(X > 1\,|X > 0) = \frac{\mathbf{P}(X > 1)}{\mathbf{P}(X > 0)} = \frac{1 - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 1)}{1 - \mathbf{P}(X = 0)} =$$

$$\frac{1 - (1 - 10^{-7})^{10^7} - 10^7 \cdot 10^{-7}(1 - 10^{-7})^{10^7-1}}{1 - (1 - 10^{-7})^{10^7}} \simeq \frac{1 - 2e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e - 2}{e - 1} \simeq 0.42$$

Abbiamo usato $(1 - \frac{1}{n})^n \simeq e^{-1}$ per n molto grande o equivalentemente l'approssimazione della distribuzione binomiale con la distribuzione di Poisson.
ii. Analogamente al punto (i)

$$\mathbf{P}(X > 2\,|X > 1) = \frac{\mathbf{P}(X > 2)}{\mathbf{P}(X > 1)} = \frac{1 - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 1) - \mathbf{P}(X = 2)}{1 - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 1)} \simeq$$

$$\frac{1 - 2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1}}{1 - e^{-1}} \simeq 0.3$$

iii. Stiamo chiedendo

$$\mathbf{P}(X = n\,|X \geq n) > 1 - r$$

o equivalentemente

$$\mathbf{P}(X > n\,|X \geq n) < r$$

Ora

$$\mathbf{P}(X > n\,|X \geq n) = \frac{\mathbf{P}(X > n)}{\mathbf{P}(X \geq n)} \simeq \frac{e^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}}{e^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}}$$

quindi vogliamo trovare n abbastanza grande in modo che si abbia

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} < r\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!} \tag{1.1}$$

Usando la formula di Lagrange del resto nella formula di Taylor per l'esponenziale troviamo

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

per uno $\xi \in (0, 1)$, quindi

$$\frac{1}{(n+1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

da cui si trova che la (1) è soddisfatta se

$$\frac{e}{(n+1)!} < \frac{r}{n!}$$

e troviamo $n > \frac{1}{er}$
Alternativamente si osservi che

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots &= \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots)\\ &< \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots) = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{n+2}{n+1})\end{aligned}$$

e si ottiene il seguente miglioramento: n deve essere tale che $r > \frac{n+2}{(n+1)^2}$ e quindi vediamo che basta prendere $n > \frac{1}{r}$.