Concorso a n.8 borse per l'avviamento alla ricerca riservate ad iscritti ai corsi di Laurea Magistrale in Matematica, a.a. 2016-17

Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"

PROVA SCRITTA DEL 14 OTTOBRE 2016

Istruzioni per lo svolgimento della prova

- Il tempo a disposizione è di 4 ore; è vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi delle parti A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula

$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3} \min\{p_A,\ p_B\}.$$

- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati ed il testo e chiudere il plico. IMPORTANTE: NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento, in nessuna altra parte dell'elaborato.

GRUPPO A

Esercizio A1. (10 punti) Partendo dal risultato (noto) che le successioni $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\cos n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono dense in $[-1,1]$, dimostrare che:

(1) $\{\sin(2n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (e $\{\cos(2n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$) sono dense in $[-1,1]$;
(2) la successione $\{\cos n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite per $n \to \infty$.

Esercizio A2. (10 punti) Dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\, dx \leq 4 \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx$$

per ogni $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tale che $f(0) = 0$.

Esercizio A3. (10 punti) Dato $\alpha \in [0,1]$, si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x(t) \\ \dot{y}(t) = \alpha \, \sin x(t) - y(t) \end{cases} \tag{S}$$

(1) Risolvere (S) per $\alpha = 0$.
(2) Provare che, per ogni $\alpha \in [0,1]$, l'origine $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (o di equilibrio) per il sistema (S).
(3) Studiare la stabilità di $(0,0)$ al variare di α in $[0,1]$.

Esercizio A4. (10 punti) Data $f \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$, poniamo

$$N = \big\{ x \in]a,b[\, : \, f'(x) = 0 \big\}.$$

Dimostrare che $f(N)$ ha misura nulla (secondo Lebesgue).

Esercizio A5. (10 punti) Due amici si danno appuntamento in un bar tra le 10 e le 11 con l'accordo che ciascuno dei due, non trovando l'amico al proprio arrivo, attende 10 minuti e poi va via. Calcolare la probabilità che i due amici si incontrino.

GRUPPO B

Esercizio B1. Sia B un anello.
(i) **(6 punti)** Supponendo che si abbia $b^2 = b$, per ogni $b \in B$, mostrare che B e' commutativo.

(ii) **(1 punto)** Supponiamo invece che si abbia $b^3 = b$, per ogni $b \in B$. Mostrare che se $x, y \in B$ allora $xy = 0$ se e solo se $yx = 0$.

(iii) **(3 punti)** Ipotesi come in (ii). Sia $c \in B$ tale che $c = c^2$. Utilizzare (ii) per mostrare che c e' *centrale*, cioe' che per ogni $x \in B$ si ha $cx = xc$.

(iv) **(1 punto)** Ipotesi come in (ii). Sia $b \in B$. Utilizzare (iii) per mostrare che b^2 e' centrale.

(v) **(3 punti)** Ipotesi come in (ii). Sia $b \in B$. Mostrare che $b + b^2 = (b + b^2)^3 = (b + b^2)^2 + (b + b^2)^2$, e concludere quindi, usando (iv), che b e' centrale, e che dunque B e' commutativo.

Esercizio B2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale con $e = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ la sua base canonica. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$F(\mathbf{e}_1) = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3,\ F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2,\ F(\mathbf{e}_3) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3.$$

(i) **(2 punti)** Stabilire se l'endomorfismo F e' triangolabile su $\mathbb{R}$.

(ii) **(3 punti)** Stabilire se il polinomio minimo $m_F(x) \in \mathbb{R}[x]$ ed il polinomio caratteristico $p_F(x) \in \mathbb{R}[x]$ dell'endomorfismo F coincidono (a meno del segno).

(iii) **(3 punti)** Verificare che, a meno dell'ordine dei blocchi, la forma canonica di Jordan di F e'

$$\begin{pmatrix} J_2 & O_{2,1} \\ O_{1,2} & J_1 \end{pmatrix},$$

dove J_2 e' un blocco di Jordan 2×2, J_1 e' un blocco di Jordan 1×1, $O_{2,1}$ e' la matrice colonna $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $O_{1,2}$ e' la matrice riga $(0\ \ 0)$.

(iv) **(4 punti)** Notazione come in (iii). Siano

$$A = \begin{pmatrix} J_2 & O_{2,1} \\ O_{1,2} & J_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} J_1 & O_{1,2} \\ O_{2,1} & J_2 \end{pmatrix}.$$

Determinare il sottogruppo $H \leq GL(3, \mathbb{R})$ generato dagli elementi A e B.

Esercizio B3. Si consideri $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ il piano affine reale, con riferimento affine $RA(O;x,y)$. Sia data $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la curva piana di equazione cartesiana

$$f(x,y) = y^3 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

(i) **(2 punti)** Determinare i punti singolari di C e le equazione delle tangenti principali nei punti singolari.

(ii) **(4 punti)** Determinare una parametrizzazione razionale di C e studiare iniettivita' e regolarita' della parametrizzazione determinata.

(iii) **(4 punti)** Considerando l'inclusione naturale

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (x,y) \to [1,x,y],$$

dove $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale, verificare che C e' non-singolare nei suoi punti impropri.

(iv) **(2 punti)** Verificare che C possiede un unico punto di flesso all'infinito e si calcoli l'equazione cartesiana omogenea della retta (proiettiva) tangente inflessionale.

Esercizio B4. Sia data la parametrizzazione

$$\begin{array}{cccc} \underline{x}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longrightarrow & (u,\ v,\ uv). \end{array}$$

(i) **(2 punti)** Stabilire se $\underline{x}(u,v)$ e' una parametrizzazione regolare, iniettiva e determinare l'equazione cartesiana della superficie immagine $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) **(3 punti)** Classificare i punti di Σ.

(iii) **(4 punti)** Preso $P = (1,1,1) \in \Sigma$, determinare curvature principali, tangenti principali e tangenti asintotiche di Σ in P.

(iv) **(3 punti)** Determinare le linee asintotiche di Σ e calcolare il vettore curvatura in ciascun punto di esse.