INdAM

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio, 2 borse aggiuntive e a 40 premi
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2011/2012.
Piano Lauree Scientifiche.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) In un triangolo di lati $AB = 20$, $BC = 20$, $AC = 24$, si traccia una semicirconferenza, il cui diametro DE è contenuto nel lato BC, in modo che essa sia tangente ai lati AB e AC. Quanto misura DE?

A. $\frac{96}{5}$ B. $\frac{52}{3}$ C. $\frac{122}{7}$

D. $\frac{225}{13}$ E. $\frac{192}{11}$

(2) Ciascun lato dell'esagono $ABCDEF$ viene colorato a caso, con eguali probabilità, di rosso o di blu. Qual è la probabilità che dal vertice A si possa giungere fino al vertice E percorrendo lati di un medesimo colore?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{11}{16}$ E. $\frac{7}{8}$

(3) L'affermazione "lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto almeno due esami" è falsa. Questo significa che...

A. lo scorso anno nessuno studente ha sostenuto almeno due esami

B. lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame

C. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto non più di due esami

D. lo scorso anno non tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame

E. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto al più un esame

(4) Quale fra le seguenti proprietà *non* vale per tutti i triangoli rettangoli?

A. ortocentro, incentro e circocentro sono allineati

B. le due bisettrici degli angoli acuti formano un angolo di $135°$

C. l'ortocentro coincide con un vertice

D. l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili

E. baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati

(5) Sapendo che h è un numero reale tale che $\frac{1}{h} < h < -h$, disporre in ordine crescente i numeri:

$$0,\ 1,\ h,\ h^2,\ -h^2.$$

A. $-h^2 < h < 0 < 1 < h^2$

B. $-h^2 < h < 0 < h^2 < 1$

C. $h < -h^2 < 0 < 1 < h^2$

D. $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$

E. $-h^2 < 0 < 1 < h < h^2$

(6) Quanti sono i polinomi non nulli $f(x)$ di 2° grado, che si annullano per $x = 3$ e per $x = 4$, i cui coefficienti sono numeri interi relativi tutti minori di 100?

A. 1

B. nessuno

C. 8

D. infiniti

E. 22

(7) Nella piramide $VABC$, la base ABC è un triangolo rettangolo in B e lo spigolo VA è perpendicolare al piano di ABC. Si sa che il volume è $160\,\text{cm}^3$, che $BC = 5\,\text{cm}$, che $VB = 20\,\text{cm}$. Qual è il perimetro della faccia VAB?

A. 72 cm

B. 60 cm

C. 45 cm

D. 52 cm

E. 48 cm

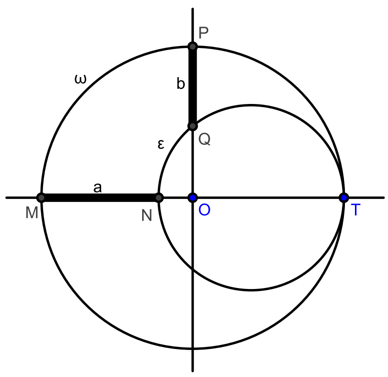
QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Qual è l'unico intero positivo n tale che il numero $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n$ è il quadrato di un intero?

(9) Nella figura qui a fianco, la circonferenza ε è tangente internamente alla circonferenza ω nel punto T ed il punto O è il centro di ω. Sappiamo inoltre che Q è un vertice del quadrato inscritto in ε avente due lati paralleli e due ortogonali a NT. Quanto vale il rapporto $\dfrac{100a^2}{b^2}$ (dove $a = MN$ e $b = PQ$)?



(10) Consideriamo un insieme A di 8 elementi. Si trovi il numero massimo di sottoinsiemi di A, ciascuno formato da 3 elementi, che è possibile scegliere in modo che l'intersezione tra due qualsiasi di essi non sia mai un insieme di 2 elementi.

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Il candidato può servirsi degli enunciati contenuti nel testo di un problema, dei quali sia richiesta la dimostrazione, per affrontare le parti successive del problema stesso, anche nel caso non abbia svolto la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Dopo aver disegnato un poligono convesso $\mathcal{P}$ con 100 lati, Anna e Bruno fanno questo gioco: a turno, a partire da Anna, ciascuno dei due traccia una diversa diagonale di $\mathcal{P}$ a sua scelta, con la condizione che essa non tagli nessuna delle diagonali già tracciate (in un punto interno a $\mathcal{P}$). Perde chi non può più tracciare diagonali quando è il suo turno.

(a) In quante regioni sarà diviso $\mathcal{P}$ al termine della partita?
(b) Chi vincerà in questo gioco?
(c) Dimostrare che, al termine della partita, vi saranno almeno due regioni ciascuna delle quali ha nel proprio bordo una coppia di lati di $\mathcal{P}$ consecutivi.
(d) Al termine della partita, quante potranno essere al più le regioni senza lati in comune con $\mathcal{P}$?

(2) (a) Si dimostri che, se l'intero positivo n non è primo, allora anche $2^n - 1$ non è primo.
(b) Si dimostri che, se n è divisibile per 3, allora $2^n - 1$ è divisibile per 7.
(c) Si dimostri che, se $2^n - 1$ è divisibile per 7, allora n è divisibile per 3.
(d) Determinare tutti gli interi positivi n tali che $2^{n-1} - 1$ e $2^{n+1} - 1$ sono primi e $2^n - 1$ non è divisibile per 7 (si ricorda che 1 non è considerato numero primo).

(3) Fissata una circonferenza δ e dato un triangolo ABC inscritto in δ, si indichino con A', B', C' i punti medi degli archi BC, CA, AB. Chiameremo $A'B'C'$ il triangolo *derivato* di ABC.

(a) Dimostrare che, dette α, β, γ le ampiezze degli angoli del triangolo ABC, le ampiezze degli angoli di $A'B'C'$ sono $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
(b) È vero che, dati due triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ inscritti in δ, i loro derivati $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{T}'$ sono uguali se e solo se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono uguali? È vero che, per ogni triangolo $\mathcal{T}$ inscritto in δ, esiste un triangolo il cui derivato è $\mathcal{T}$?

Sia ora $EFGH$ un quadrilatero inscritto nella circonferenza δ. Chiameremo *derivato* di $EFGH$ il quadrilatero che ha per vertici i punti medi degli archi EF, FG, GH, HE.

(c) Quali quadrilateri inscritti in δ hanno per derivato un rettangolo? Quali rettangoli possono essere i derivati di un quadrilatero?
(d) Dimostrare che un quadrilatero $\mathcal{K}$ iscritto in δ è il derivato di un quadrilatero se e solo se gli archi sottesi dai lati opposti di $\mathcal{K}$ hanno somma pari alla metà della circonferenza δ.

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1.	A	B	C	D	E
Quesito 2.	A	B	C	D	E
Quesito 3.	A	B	C	D	E
Quesito 4.	A	B	C	D	E
Quesito 5.	A	B	C	D	E
Quesito 6.	A	B	C	D	E
Quesito 7.	A	B	C	D	E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8.	
Quesito 9.	
Quesito 10.	

INdAM

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio, 2 borse aggiuntive e a 40 premi
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2011/2012.
Piano Lauree Scientifiche.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) Sapendo che h è un numero reale tale che $\frac{1}{h} < h < -h$, disporre in ordine crescente i numeri:

$$0,\ 1,\ h,\ h^2,\ -h^2.$$

A. $-h^2 < h < 0 < 1 < h^2$

B. $-h^2 < h < 0 < h^2 < 1$

C. $h < -h^2 < 0 < 1 < h^2$

D. $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$

E. $-h^2 < 0 < 1 < h < h^2$

(2) Nella piramide $VABC$, la base ABC è un triangolo rettangolo in B e lo spigolo VA è perpendicolare al piano di ABC. Si sa che il volume è $160\,\text{cm}^3$, che $BC = 5\,\text{cm}$, che $VB = 20\,\text{cm}$. Qual è il perimetro della faccia VAB?

A. 52 cm

B. 48 cm

C. 45 cm

D. 72 cm

E. 60 cm

(3) Quanti sono i polinomi non nulli $f(x)$ di 2° grado, che si annullano per $x = 3$ e per $x = 4$, i cui coefficienti sono numeri interi relativi tutti minori di 100?

A. 1

B. nessuno

C. 8

D. infiniti

E. 22

(4) Ciascun lato dell'esagono $ABCDEF$ viene colorato a caso, con eguali probabilità, di rosso o di blu. Qual è la probabilità che dal vertice A si possa giungere fino al vertice E percorrendo lati di un medesimo colore?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{9}{16}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{11}{16}$

E. $\frac{7}{8}$

(5) Quale fra le seguenti proprietà *non* vale per tutti i triangoli rettangoli?

A. l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili
B. ortocentro, incentro e circocentro sono allineati
C. baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati
D. l'ortocentro coincide con un vertice
E. le due bisettrici degli angoli acuti formano un angolo di $135°$

(6) L'affermazione "lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto almeno due esami" è falsa. Questo significa che...

A. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto non più di due esami
B. lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame
C. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto al più un esame
D. lo scorso anno non tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame
E. lo scorso anno nessuno studente ha sostenuto almeno due esami

(7) In un triangolo di lati $AB = 20$, $BC = 20$, $AC = 24$, si traccia una semicirconferenza, il cui diametro DE è contenuto nel lato BC, in modo che essa sia tangente ai lati AB e AC. Quanto misura DE?

A. $\frac{96}{5}$ B. $\frac{52}{3}$ C. $\frac{122}{7}$
D. $\frac{225}{13}$ E. $\frac{192}{11}$

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

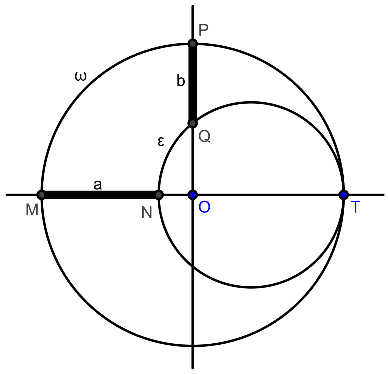
Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Consideriamo un insieme A di 8 elementi. Si trovi il numero massimo di sottoinsiemi di A, ciascuno formato da 3 elementi, che è possibile scegliere in modo che l'intersezione tra due qualsiasi di essi non sia mai un insieme di 2 elementi.

(9) Qual è l'unico intero positivo n tale che il numero $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n$ è il quadrato di un intero?

(10) Nella figura qui a fianco, la circonferenza ε è tangente internamente alla circonferenza ω nel punto T ed il punto O è il centro di ω. Sappiamo inoltre che Q è un vertice del quadrato inscritto in ε avente due lati paralleli e due ortogonali a NT. Quanto vale il rapporto $\frac{100a^2}{b^2}$ (dove $a = MN$ e $b = PQ$)?



PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Il candidato può servirsi degli enunciati contenuti nel testo di un problema, dei quali sia richiesta la dimostrazione, per affrontare le parti successive del problema stesso, anche nel caso non abbia svolto la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Dopo aver disegnato un poligono convesso $\mathcal{P}$ con 100 lati, Anna e Bruno fanno questo gioco: a turno, a partire da Anna, ciascuno dei due traccia una diversa diagonale di $\mathcal{P}$ a sua scelta, con la condizione che essa non tagli nessuna delle diagonali già tracciate (in un punto interno a $\mathcal{P}$). Perde chi non può più tracciare diagonali quando è il suo turno.

(a) In quante regioni sarà diviso $\mathcal{P}$ al termine della partita?
(b) Chi vincerà in questo gioco?
(c) Dimostrare che, al termine della partita, vi saranno almeno due regioni ciascuna delle quali ha nel proprio bordo una coppia di lati di $\mathcal{P}$ consecutivi.
(d) Al termine della partita, quante potranno essere al più le regioni senza lati in comune con $\mathcal{P}$?

(2) (a) Si dimostri che, se l'intero positivo n non è primo, allora anche $2^n - 1$ non è primo.
(b) Si dimostri che, se n è divisibile per 3, allora $2^n - 1$ è divisibile per 7.
(c) Si dimostri che, se $2^n - 1$ è divisibile per 7, allora n è divisibile per 3.
(d) Determinare tutti gli interi positivi n tali che $2^{n-1} - 1$ e $2^{n+1} - 1$ sono primi e $2^n - 1$ non è divisibile per 7 (si ricorda che 1 non è considerato numero primo).

(3) Fissata una circonferenza δ e dato un triangolo ABC inscritto in δ, si indichino con A', B', C' i punti medi degli archi BC, CA, AB. Chiameremo $A'B'C'$ il triangolo *derivato* di ABC.

(a) Dimostrare che, dette α, β, γ le ampiezze degli angoli del triangolo ABC, le ampiezze degli angoli di $A'B'C'$ sono $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
(b) È vero che, dati due triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ inscritti in δ, i loro derivati $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{T}'$ sono uguali se e solo se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono uguali? È vero che, per ogni triangolo $\mathcal{T}$ inscritto in δ, esiste un triangolo il cui derivato è $\mathcal{T}$?

Sia ora $EFGH$ un quadrilatero inscritto nella circonferenza δ. Chiameremo *derivato* di $EFGH$ il quadrilatero che ha per vertici i punti medi degli archi EF, FG, GH, HE.

(c) Quali quadrilateri inscritti in δ hanno per derivato un rettangolo? Quali rettangoli possono essere i derivati di un quadrilatero?
(d) Dimostrare che un quadrilatero $\mathcal{K}$ iscritto in δ è il derivato di un quadrilatero se e solo se gli archi sottesi dai lati opposti di $\mathcal{K}$ hanno somma pari alla metà della circonferenza δ.

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1.	A	B	C	D	E
Quesito 2.	A	B	C	D	E
Quesito 3.	A	B	C	D	E
Quesito 4.	A	B	C	D	E
Quesito 5.	A	B	C	D	E
Quesito 6.	A	B	C	D	E
Quesito 7.	A	B	C	D	E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8.

Quesito 9.

Quesito 10.

INdAM

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio, 2 borse aggiuntive e a 40 premi
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2011/2012.
Piano Lauree Scientifiche.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) Quale fra le seguenti proprietà *non* vale per tutti i triangoli rettangoli?

A. le due bisettrici degli angoli acuti formano un angolo di $135°$

B. ortocentro, incentro e circocentro sono allineati

C. l'ortocentro coincide con un vertice

D. baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati

E. l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili

(2) In un triangolo di lati $AB = 20$, $BC = 20$, $AC = 24$, si traccia una semicirconferenza, il cui diametro DE è contenuto nel lato BC, in modo che essa sia tangente ai lati AB e AC. Quanto misura DE?

A. $\frac{96}{5}$ B. $\frac{52}{3}$ C. $\frac{122}{7}$

D. $\frac{225}{13}$ E. $\frac{192}{11}$

(3) Ciascun lato dell'esagono $ABCDEF$ viene colorato a caso, con eguali probabilità, di rosso o di blu. Qual è la probabilità che dal vertice A si possa giungere fino al vertice E percorrendo lati di un medesimo colore?

A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{11}{16}$

D. $\frac{5}{8}$ E. $\frac{1}{2}$

(4) L'affermazione "lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto almeno due esami" è falsa. Questo significa che...

A. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto non più di due esami

B. lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame

C. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto al più un esame

D. lo scorso anno non tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame

E. lo scorso anno nessuno studente ha sostenuto almeno due esami

(5) Sapendo che h è un numero reale tale che $\frac{1}{h} < h < -h$, disporre in ordine crescente i numeri:

$$0,\ 1,\ h,\ h^2,\ -h^2.$$

A. $-h^2 < h < 0 < h^2 < 1$

B. $-h^2 < 0 < 1 < h < h^2$

C. $-h^2 < h < 0 < 1 < h^2$

D. $h < -h^2 < 0 < 1 < h^2$

E. $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$

(6) Nella piramide $VABC$, la base ABC è un triangolo rettangolo in B e lo spigolo VA è perpendicolare al piano di ABC. Si sa che il volume è $160\,\text{cm}^3$, che $BC = 5\,\text{cm}$, che $VB = 20\,\text{cm}$. Qual è il perimetro della faccia VAB?

A. 45 cm

B. 60 cm

C. 48 cm

D. 52 cm

E. 72 cm

(7) Quanti sono i polinomi non nulli $f(x)$ di $2°$ grado, che si annullano per $x = 3$ e per $x = 4$, i cui coefficienti sono numeri interi relativi tutti minori di 100?

A. 1

B. nessuno

C. 8

D. infiniti

E. 22

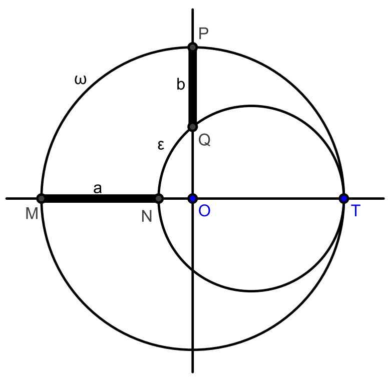
QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Consideriamo un insieme A di 8 elementi. Si trovi il numero massimo di sottoinsiemi di A, ciascuno formato da 3 elementi, che è possibile scegliere in modo che l'intersezione tra due qualsiasi di essi non sia mai un insieme di 2 elementi.

(9) Nella figura qui a fianco, la circonferenza ε è tangente internamente alla circonferenza ω nel punto T ed il punto O è il centro di ω. Sappiamo inoltre che Q è un vertice del quadrato inscritto in ε avente due lati paralleli e due ortogonali a NT. Quanto vale il rapporto $\dfrac{100a^2}{b^2}$ (dove $a = MN$ e $b = PQ$)?



(10) Qual è l'unico intero positivo n tale che il numero $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n$ è il quadrato di un intero?

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Il candidato può servirsi degli enunciati contenuti nel testo di un problema, dei quali sia richiesta la dimostrazione, per affrontare le parti successive del problema stesso, anche nel caso non abbia svolto la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Dopo aver disegnato un poligono convesso $\mathcal{P}$ con 100 lati, Anna e Bruno fanno questo gioco: a turno, a partire da Anna, ciascuno dei due traccia una diversa diagonale di $\mathcal{P}$ a sua scelta, con la condizione che essa non tagli nessuna delle diagonali già tracciate (in un punto interno a $\mathcal{P}$). Perde chi non può più tracciare diagonali quando è il suo turno.

(a) In quante regioni sarà diviso $\mathcal{P}$ al termine della partita?
(b) Chi vincerà in questo gioco?
(c) Dimostrare che, al termine della partita, vi saranno almeno due regioni ciascuna delle quali ha nel proprio bordo una coppia di lati di $\mathcal{P}$ consecutivi.
(d) Al termine della partita, quante potranno essere al più le regioni senza lati in comune con $\mathcal{P}$?

(2) (a) Si dimostri che, se l'intero positivo n non è primo, allora anche $2^n - 1$ non è primo.
(b) Si dimostri che, se n è divisibile per 3, allora $2^n - 1$ è divisibile per 7.
(c) Si dimostri che, se $2^n - 1$ è divisibile per 7, allora n è divisibile per 3.
(d) Determinare tutti gli interi positivi n tali che $2^{n-1} - 1$ e $2^{n+1} - 1$ sono primi e $2^n - 1$ non è divisibile per 7 (si ricorda che 1 non è considerato numero primo).

(3) Fissata una circonferenza δ e dato un triangolo ABC inscritto in δ, si indichino con A', B', C' i punti medi degli archi BC, CA, AB. Chiameremo $A'B'C'$ il triangolo *derivato* di ABC.

(a) Dimostrare che, dette α, β, γ le ampiezze degli angoli del triangolo ABC, le ampiezze degli angoli di $A'B'C'$ sono $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
(b) È vero che, dati due triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ inscritti in δ, i loro derivati $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{T}'$ sono uguali se e solo se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono uguali? È vero che, per ogni triangolo $\mathcal{T}$ inscritto in δ, esiste un triangolo il cui derivato è $\mathcal{T}$?

Sia ora $EFGH$ un quadrilatero inscritto nella circonferenza δ. Chiameremo *derivato* di $EFGH$ il quadrilatero che ha per vertici i punti medi degli archi EF, FG, GH, HE.

(c) Quali quadrilateri inscritti in δ hanno per derivato un rettangolo? Quali rettangoli possono essere i derivati di un quadrilatero?
(d) Dimostrare che un quadrilatero $\mathcal{K}$ inscritto in δ è il derivato di un quadrilatero se e solo se gli archi sottesi dai lati opposti di $\mathcal{K}$ hanno somma pari alla metà della circonferenza δ.

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1.	A	B	C	D	E
Quesito 2.	A	B	C	D	E
Quesito 3.	A	B	C	D	E
Quesito 4.	A	B	C	D	E
Quesito 5.	A	B	C	D	E
Quesito 6.	A	B	C	D	E
Quesito 7.	A	B	C	D	E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8.

Quesito 9.

Quesito 10.

INdAM

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio, 2 borse aggiuntive e a 40 premi
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2011/2012.
Piano Lauree Scientifiche.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) L'affermazione "lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto almeno due esami" è falsa. Questo significa che...

A. lo scorso anno nessuno studente ha sostenuto almeno due esami

B. lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame

C. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto non più di due esami

D. lo scorso anno non tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame

E. lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto al più un esame

(2) Sapendo che h è un numero reale tale che $\frac{1}{h} < h < -h$, disporre in ordine crescente i numeri:

$$0,\ 1,\ h,\ h^2,\ -h^2.$$

A. $-h^2 < h < 0 < h^2 < 1$

B. $-h^2 < 0 < 1 < h < h^2$

C. $-h^2 < h < 0 < 1 < h^2$

D. $h < -h^2 < 0 < 1 < h^2$

E. $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$

(3) Nella piramide $VABC$, la base ABC è un triangolo rettangolo in B e lo spigolo VA è perpendicolare al piano di ABC. Si sa che il volume è $160\,\text{cm}^3$, che $BC = 5\,\text{cm}$, che $VB = 20\,\text{cm}$. Qual è il perimetro della faccia VAB?

A. 52 cm

B. 48 cm

C. 45 cm

D. 72 cm

E. 60 cm

(4) Quanti sono i polinomi non nulli $f(x)$ di 2° grado, che si annullano per $x = 3$ e per $x = 4$, i cui coefficienti sono numeri interi relativi tutti minori di 100?

A. nessuno

B. 1

C. 8

D. 22

E. infiniti

(5) In un triangolo di lati $AB = 20$, $BC = 20$, $AC = 24$, si traccia una semicirconferenza, il cui diametro DE è contenuto nel lato BC, in modo che essa sia tangente ai lati AB e AC. Quanto misura DE?

A. $\frac{52}{3}$ B. $\frac{96}{5}$ C. $\frac{122}{7}$

D. $\frac{192}{11}$ E. $\frac{225}{13}$

(6) Ciascun lato dell'esagono $ABCDEF$ viene colorato a caso, con eguali probabilità, di rosso o di blu. Qual è la probabilità che dal vertice A si possa giungere fino al vertice E percorrendo lati di un medesimo colore?

A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{11}{16}$

D. $\frac{5}{8}$ E. $\frac{1}{2}$

(7) Quale fra le seguenti proprietà *non* vale per tutti i triangoli rettangoli?

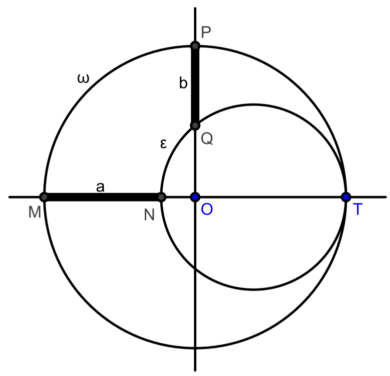
A. ortocentro, incentro e circocentro sono allineati
B. le due bisettrici degli angoli acuti formano un angolo di $135°$
C. l'ortocentro coincide con un vertice
D. l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili
E. baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Nella figura qui a fianco, la circonferenza ε è tangente internamente alla circonferenza ω nel punto T ed il punto O è il centro di ω. Sappiamo inoltre che Q è un vertice del quadrato inscritto in ε avente due lati paralleli e due ortogonali a NT. Quanto vale il rapporto $\frac{100a^2}{b^2}$ (dove $a = MN$ e $b = PQ$)?



(9) Consideriamo un insieme A di 8 elementi. Si trovi il numero massimo di sottoinsiemi di A, ciascuno formato da 3 elementi, che è possibile scegliere in modo che l'intersezione tra due qualsiasi di essi non sia mai un insieme di 2 elementi.

(10) Qual è l'unico intero positivo n tale che il numero $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n$ è il quadrato di un intero?

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Il candidato può servirsi degli enunciati contenuti nel testo di un problema, dei quali sia richiesta la dimostrazione, per affrontare le parti successive del problema stesso, anche nel caso non abbia svolto la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Dopo aver disegnato un poligono convesso $\mathcal{P}$ con 100 lati, Anna e Bruno fanno questo gioco: a turno, a partire da Anna, ciascuno dei due traccia una diversa diagonale di $\mathcal{P}$ a sua scelta, con la condizione che essa non tagli nessuna delle diagonali già tracciate (in un punto interno a $\mathcal{P}$). Perde chi non può più tracciare diagonali quando è il suo turno.

(a) In quante regioni sarà diviso $\mathcal{P}$ al termine della partita?
(b) Chi vincerà in questo gioco?
(c) Dimostrare che, al termine della partita, vi saranno almeno due regioni ciascuna delle quali ha nel proprio bordo una coppia di lati di $\mathcal{P}$ consecutivi.
(d) Al termine della partita, quante potranno essere al più le regioni senza lati in comune con $\mathcal{P}$?

(2) (a) Si dimostri che, se l'intero positivo n non è primo, allora anche $2^n - 1$ non è primo.
(b) Si dimostri che, se n è divisibile per 3, allora $2^n - 1$ è divisibile per 7.
(c) Si dimostri che, se $2^n - 1$ è divisibile per 7, allora n è divisibile per 3.
(d) Determinare tutti gli interi positivi n tali che $2^{n-1} - 1$ e $2^{n+1} - 1$ sono primi e $2^n - 1$ non è divisibile per 7 (si ricorda che 1 non è considerato numero primo).

(3) Fissata una circonferenza δ e dato un triangolo ABC inscritto in δ, si indichino con A', B', C' i punti medi degli archi BC, CA, AB. Chiameremo $A'B'C'$ il triangolo *derivato* di ABC.

(a) Dimostrare che, dette α, β, γ le ampiezze degli angoli del triangolo ABC, le ampiezze degli angoli di $A'B'C'$ sono $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
(b) È vero che, dati due triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ inscritti in δ, i loro derivati $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{T}'$ sono uguali se e solo se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono uguali? È vero che, per ogni triangolo $\mathcal{T}$ inscritto in δ, esiste un triangolo il cui derivato è $\mathcal{T}$?

Sia ora $EFGH$ un quadrilatero inscritto nella circonferenza δ. Chiameremo *derivato* di $EFGH$ il quadrilatero che ha per vertici i punti medi degli archi EF, FG, GH, HE.

(c) Quali quadrilateri inscritti in δ hanno per derivato un rettangolo? Quali rettangoli possono essere i derivati di un quadrilatero?
(d) Dimostrare che un quadrilatero $\mathcal{K}$ inscritto in δ è il derivato di un quadrilatero se e solo se gli archi sottesi dai lati opposti di $\mathcal{K}$ hanno somma pari alla metà della circonferenza δ.

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1.	A	B	C	D	E
Quesito 2.	A	B	C	D	E
Quesito 3.	A	B	C	D	E
Quesito 4.	A	B	C	D	E
Quesito 5.	A	B	C	D	E
Quesito 6.	A	B	C	D	E
Quesito 7.	A	B	C	D	E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8.

Quesito 9.

Quesito 10.