INdAM

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio e 2 borse aggiuntive
per l'iscrizione ai Corsi di Laurea in Matematica, anno accademico 2016/2017.

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema nell'apposito foglio.
È ammesso l'uso di riga e compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

Si ricorda che è proibito, a pena di esclusione, scrivere il proprio nominativo o altri segni di riconoscimento nei fogli contenenti il testo o lo svolgimento della prova; il nominativo va riportato esclusivamente nell'apposita busta piccola che dovrà essere sigillata.
Si fa inoltre presente che le domande della prova non sono disposte in ordine di difficoltà.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) Una prova di concorso contiene 7 quesiti a risposta multipla, ciascuno dei quali con 5 alternative di risposta. Ad ogni quesito si può rispondere indicando una delle 5 alternative oppure lasciandolo in bianco. Quanti devono essere, come minimo, i candidati per avere la certezza che almeno 3 di loro risponderanno in modo identico a tutti i quesiti?

A. $3 \cdot 6^7$ B. $2 \cdot 6^7$ C. $3 \cdot 6^7 + 1$

D. $2 \cdot 6^7 + 1$ E. $2 \cdot (6^7 + 1)$

(2) Di un numero naturale n conosciamo tutte le cifre tranne due: quella delle migliaia e quella delle unità. Più precisamente, la scrittura di n è $7575\square18\square$, dove ciascun quadratino indica una cifra sconosciuta. Sappiamo, inoltre, che n è multiplo di 101. Qual è la cifra delle unità di n?

A. 7 B. 8 C. 1

D. 5 E. 6

(3) A proposito degli interi positivi a, b, c, sappiamo che: $MCD(a,b) = 60$, $MCD(b,c) = 24$, $MCD(a,c) = 36$ e $mcm(a,b,c) = 5760$. Qual è il valore di a?

A. 1440 B. 360 C. 2880

D. 720 E. 180

(4) Il polinomio $p(x) = x^2 + bx + c$ ha due radici reali distinte. Se i coefficienti b e c sono interi, quale dei seguenti numeri è sicuramente intero?

A. La differenza dei quadrati delle radici. B. La somma dei quadrati delle radici.

C. La differenza delle radici. D. La media aritmetica delle radici.

E. La media aritmetica dei quadrati delle radici.

(5) Sia S una sfera di raggio 15. Preso un punto P a distanza 25 dal centro di S, le rette passanti per P e tangenti a S toccano la superficie di S lungo una circonferenza γ. Qual è il volume del cono di vertice P avente γ come circonferenza di base?

A. 750π B. 852π C. 744π

D. 822π E. 768π

(6) I lati PQ, QR, RS e SP di un trapezio misurano, rispettivamente, 32, 30, 20 e 10 cm. Qual è l'area del trapezio?

A. $384\,\text{cm}^2$ B. $360\,\text{cm}^2$

C. $392\,\text{cm}^2$ D. i dati forniti non sono sufficienti

E. $376\,\text{cm}^2$

(7) In un'urna inizialmente vuota vengono messe tre palline, ciascuna bianca o nera. Si sa che, per stabilire i colori delle palline, sono state lanciate tre monete: per ogni testa è stata messa nell'urna una pallina bianca e per ogni croce una pallina nera. Ad una persona viene chiesto di guardare dentro l'urna e prendere due palline dello stesso colore. La persona mostra le palline prese, che sono bianche. Detta p la probabilità che anche la terza pallina sia bianca, risulta

A. $p = 1/2$ B. $1/4 < p < 1/3$ C. $p = 1/3$

D. $1/3 < p < 1/2$ E. $p = 1/4$

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Caterina vuole disegnare un poligono convesso con 2016 lati, facendo in modo che alcuni degli angoli interni del poligono misurino $155°$. Quanti potranno essere, al massimo, questi angoli di $155°$?

(9) La seguente tabella si riferisce ad un referendum in un paese europeo, distinguendo gli aventi diritto al voto in due fasce d'età: la fascia 1 (da 18 a 40 anni inclusi) e la fascia 2 (sopra i 40 anni).

	% popolazione	% votanti
Fascia 1	25%	36%
Fascia 2	65%	80%

La prima colonna indica le numerosità delle due fasce d'età (in percentuale sul totale della popolazione), mentre la seconda colonna indica le percentuali dei votanti (sui cittadini di ciascuna fascia). Si sa che il NO ha ottenuto esattamente il 48% dei voti ed il SI il 52%. Quale sarebbe stata la percentuale dei NO se, oltre a coloro che hanno votato, si fossero espressi per il NO anche tutti i cittadini della fascia 1 che non hanno votato? [*scrivere un numero da* 0 *a* 100*, approssimando il risultato all'intero più vicino*]

(10) Sia f una funzione che ad ogni numero intero relativo associa un numero intero relativo. Si sa che, per ogni intero relativo x, si ha $f(-x)+2 = -f(x)$ e $f(x+1)+f(-x) = 0$. Indicare il valore di $f(2016)$.

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, **motivando adeguatamente le risposte**.
Una proposizione contenuta nel testo di un problema, della quale sia richiesta la dimostrazione, può comunque essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta.
Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(1) Sia $EFGH$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza γ. Si indichi con K il punto di intersezione delle diagonali EG e FH.

(a) Dimostrare che, se le diagonali EG e FH sono perpendicolari, allora la somma di due archi opposti ($\overset{\frown}{\mathrm{EF}} + \overset{\frown}{\mathrm{GH}}$, così come $\overset{\frown}{\mathrm{FG}} + \overset{\frown}{\mathrm{HE}}$) è pari a una semicirconferenza.

(b) È vero che, viceversa, se la somma di due archi opposti $\overset{\frown}{\mathrm{EF}} + \overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ (così come $\overset{\frown}{\mathrm{FG}} + \overset{\frown}{\mathrm{HE}}$) è pari a una semicirconferenza, allora le diagonali EG e FH sono perpendicolari?

(c) Detto M il punto medio del lato EF, dimostrare che, se le diagonali EG e FH sono perpendicolari, allora la retta MK è perpendicolare al lato GH.

(2) I tre numeri $30, 19, 6$ godono della seguente proprietà, che verrà indicata con (*):

$\boxed{\text{(*) i tre numeri sono tutti distinti e la somma di due qualunque di essi è il quadrato di un intero}}$.

(a) Trovare altri tre numeri interi con la proprietà (*), non proporzionali ai tre sopra riportati.
Trovare poi ulteriori tre numeri interi con la proprietà (*), non proporzionali né a quelli sopra riportati né a quelli appena trovati.

(b) Supponiamo che tre numeri a, b, c godano della proprietà (*). È possibile che i tre numeri $a+b$, $b+c$, $c+a$ siano tutti dispari? E che siano due pari e uno dispari?

(c) I tre numeri $65, 56, -40$ godono della proprietà (*) e, inoltre, la somma di tutti e tre è anch'essa il quadrato di un intero. Trovare altri tre numeri interi, non proporzionali ai numeri precedenti, che godono della proprietà (*) e tali che la somma di tutti e tre sia il quadrato di un intero. [Sarà privilegiata una risposta con tre interi positivi.]

(3) Dato un quadrilatero convesso $ABCD$ e un punto V interno ad esso, dimostrare che, in ciascuno dei quattro casi descritti qui di seguito, il quadrilatero $ABCD$ ha due lati paralleli:

(a) se esistono 2 punti distinti P e Q sul lato AB e 2 punti distinti P' e Q' sul lato CD tali che i segmenti PP' e QQ' si intersecano in V ed inoltre si ha che $PV = P'V$ e $Area(PVQ) = Area(P'VQ')$;

(b) se esistono 3 punti distinti P, Q, R sul lato AB e 3 punti distinti P', Q', R' sul lato CD tali che i segmenti PP', QQ', RR' passano per V ed inoltre si ha che $Area(PVQ) = Area(P'VQ')$ e $Area(QVR) = Area(Q'VR')$;

(c) se le diagonali AC e BD si intersecano in V ed esistono 5 diverse rette passanti per V ciascuna delle quali divide il quadrilatero $ABCD$ in due poligoni aventi la stessa area;

(d) se esistono 9 diverse rette passanti per V ciascuna delle quali divide il quadrilatero $ABCD$ in due poligoni aventi la stessa area.

FOGLIO DELLE RISPOSTE AI QUESITI

Per ciascuno dei quesiti a risposta multipla, cerchiare la risposta prescelta.

Quesito 1.	A	B	C	D	E
Quesito 2.	A	B	C	D	E
Quesito 3.	A	B	C	D	E
Quesito 4.	A	B	C	D	E
Quesito 5.	A	B	C	D	E
Quesito 6.	A	B	C	D	E
Quesito 7.	A	B	C	D	E

Per ciascuno dei quesiti a risposta numerica, scrivere la risposta nello spazio corrispondente.

Quesito 8. $\boxed{}$

Quesito 9. $\boxed{}$

Quesito 10. $\boxed{}$

Qualora il candidato intenda modificare una risposta già data, è necessario che indichi senza ambiguità la risposta effettivamente scelta (o eventualmente la volontà di non dare alcuna risposta).