Istituto Nazionale di Alta Matematica *F. Severi*

Prova scritta del 19 marzo 2009

Concorso a 10 borse di studio per l'avviamento alla ricerca riservate a iscritti ai corsi di Laurea Specialistica o Magistrale in Matematica

Istruzioni per lo svolgimento della prova
Il tempo a disposizione è di 3.5 ore; è vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi delle parti A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula

$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}.$$

Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nella grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento degli elaborati ed il testo e chiudere il plico.
IMPORTANTE: NON scrivere il proprio nome né tracciare alcun possibile segno di riconoscimento, in nessuna parte dell'elaborato.

ESERCIZI GRUPPO A

Esercizio 1. Sia f una funzione di classe C^2 nell'intervallo $[0,1]$ e tale che $|f''(x)| \le K$. Verficare le seguenti affermazioni

(i) esiste una costante $C > 0$ tale che $f(x) + Cx^2$ è convessa in $[0,1]$, (punti 3)

(ii) se $f(0) = f(1) = 0$ e f è convessa, allora $f(x) \le 0$ per ogni $x \in [0,1]$, (punti 3)

(iii) se $f(0) = f(1) = 0$ allora $|f'(x)| \le K$ per ogni $x \in [0,1]$, (punti 3)

(iv) se $f(0) = f(1) = 0$ allora $|f(x)| \le K/2$ per ogni $x \in [0,1]$. (punti 3)

Esercizio 2. Sia $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ una soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$

dove A è una matrice 3×3 a coefficienti reali tale che $A_{ij} = -A_{ji}$ per $i, j = 1,2,3$. Si provi che

(i) la soluzione descrive una curva regolare su una sfera di $\mathbb{R}^3$, (punti 4)

(ii) esiste un vettore $\mathbf{j}$ tale che $A\xi = \mathbf{j} \wedge \xi$, (punti 3)

(iii) scrivere un campo vettoriale **F** tale che $A\xi = \text{rot}(\mathbf{F}) \wedge \xi$, (punti 3)

(iv) il sistema possiede solo soluzioni periodiche o costanti (punti 2).

Esercizio 3. Sia H la funzione definita in $[0,1]$ come segue

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & \text{se } x = n/m \text{ con } n, m \text{ coprimi} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

si dimostri che

(i) per ogni m fissato la disequazione $H(x) \geq 1/m$ ammette un numero finito di soluzioni, (punti 3)

(ii) per ogni x_0 si ha $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e che di conseguenza i punti di continuità della funzione sono tutti e soli quelli irrazionali di $[0,1]$, (punti 3)

(iii) per ogni m intero positivo si può dare una decomposizione dell'intervallo $[0,1]$ tale che la corrispondente somma superiore di Riemann relativa alla funzione $H(x)$ sia minore di $2/m$, (punti 3)

(iv) $H(x)$ è integrabile secondo Riemann e si determini $\displaystyle\int_0^1 H(x)\,dx$. (punti 3)

Esercizio 4. Data $\{x_n\}$ la successione delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\ln\left(\dfrac{1}{n} + x^2(t)\right) \\ x(0) = 1, \quad t \geq 0 \end{cases},$$

si discutano le seguenti questioni

(i) perché la soluzione esiste? (punti 2)

(ii) perché la soluzione esiste in tutto $[0, +\infty)$? (punti 2)

(iii) si studi la convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (1 - x_n(t))$, (punti 4)

(iv) si studi la convergenza uniforme della serie precedente (punti 4).

Esercizio 5. Sia K_n il grafo completo su n nodi, ovvero il grafo nel quale tutte le coppie di nodi sono unite da un arco. Per ogni arco si lancia una moneta che da' testa con probabilità p. Se viene croce, l'arco viene rimosso e sia A_i la probabilità che il vertice i rimanga isolato e T il numero di triangoli nel grafo dopo tale procedura. Si risponda alle seguenti domande

(i) quanti archi ha K_n? Quanti triangoli? (2 punti)

(ii) Quanto vale $\mathbb{P}(A_1)$? (2 punti)

(iii) Quanto vale $\mathbb{P}(A_1|A_2)$? (2 punti)

(iv) Quanto vale $\mathbb{E}(T)$? (2 punti)

(v) Quanto vale $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T)$? (2 punti)

(vi) Infine si studi il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{T}{\mathbb{E}(T)}$. (2 punti)

Esercizio 6. Date due successioni x_n e z_n definite per ricorrenza dal sistema

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n - \beta x_n z_n \\ x_{n+1} = (1-\gamma)x_n + \beta x_n z_n \\ x_0 = 1-\varepsilon, z_0 = \varepsilon \end{cases}$$

dove β, ε e γ sono delle costanti reali in $(0,1)$, si provi che

(i) posto $s_n = x_n + z_n$ segue che $0 < s_n < 1$ per ogni n, (punti 2)

(ii) la successione s_n è decrescente, (punti 2)

(iii) $0 < x_n, z_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, (punti 2)

(iv) z_n è decrescente (e x_n?), (punti 2)

(v) x_n tende a zero. (punti 4)

ESERCIZI GRUPPO B

Esercizio 1 Sia $\{b_1, b_2, b_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Al variare di t reale si consideri l'unica applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ per la quale b_2 e' un autovettore rispetto all'autovalore 2 e si ha $F(b_1) = b_1 + b_2$, $F(b_3) = tb_2 + b_3$.

(i) Al variare di t si indichi una base dell'immagine di F. (punti 3)

(ii) Si stabilisca per quali t l'operatore F risulta essere diagonalizzabile. (punti 4)

(iii) Per tutti i valori trovati si indichi una base diagonalizzante. (punti 5)

Esercizio 2 Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'unico prodotto scalare per cui risultino ortonormali i vettori $(1,2,3)$, $(0,1,1)$ e $(0,0,1)$.

(i) Determinare la matrice associata a g rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. (punti 6)

(ii) Si trovi una base ortogonale (rispetto a g) dello spazio ortogonale a e_1. (punti 6)

Esercizio 3 Si consideri la superficie S dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\phi : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3, \qquad (s,t) \to (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 2s + t).$$

(i) Si mostri che la parametrizzazione è regolare e si diano equazioni cartesiane e parametriche del piano tangente alla superficie S nel punto $\phi(1/4, 1/2)$. (punti 3)

(ii) Si mostri che la chiusura topologica di S è una superficie di rotazione. (punti 3)

(iii) Si calcolino le curvature principali in ogni punto di S. (punti 3)

(iv) La superficie S risulta essere localmente isometrica ad una sfera bidimensionale? E ad un piano? Giustificare la risposta. (punti 3)

Esercizio 4 Sia $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ lo spazio proiettivo reale n-dimensionale munito della topologia standard e si denotino con $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ le coordinate omogenee di un suo punto.

(i) Si dimostri che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso, compatto e di Hausdorff. (punti 4)

(ii) Se, per $\big([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]\big)$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si pone

$$F\big([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]\big) = [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1], \qquad (*)$$

dimostrare che $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è ben definita da (*), iniettiva ed ha per immagine la quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ data da $Q = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \ : \ z_0 z_3 = z_1 z_2\}$. (punti 4)

(iii) Si dimostri che l'applicazione F è continua e chiusa e quindi definisce un omeomorfismo da $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in Q. (punti 4)

Esercizio 5 Dato un gruppo G sia $Aut(G) := \{\phi : G \to G \ : \ \phi \text{ isomorfismo}\}$ il suo gruppo degli automorfismi.

(i) Per ogni G ciclico, si determini la cardinalità di $Aut(G)$. (punti 4)

(ii) Per G ciclico, si mostri che $Aut(G)$ è sempre abeliano ma non è detto che sia ciclico. (punti 4)

(iii) Chi è il gruppo degli automorfismi interni del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{15}$ e del gruppo simmetrico S_3? (Si ricordi che ogni elemento h di G determina un automorfismo interno $G \to G$ tramite il coniugio $g \to hgh^{-1}$). (punti 4)

Esercizio 6 Si consideri il polinomio $x^3 - 5$ in $F[X]$, con $F = \mathbb{Q}$ oppure $F = \mathbb{R}$.

(i) In entrambi i casi si determini il campo di spezzamento K_F e si stabilisca se K_F è algebricamente chiuso. (punti 6)

(ii) Si disegnino sul piano complesso le radici di tale polinomio e si indichino gli elementi del sottogruppo di $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ da loro generato. Di che gruppo si tratta? (punti 6)