

Prova scritta per il concorso a n. 40 borse di studio per studenti universitari di Matematica
Progetto Lauree Scientifiche – Istituto Nazionale di Alta Matematica
Anno accademico 2006–2007

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla ed in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite nello schema allegato. In ogni **quesito a risposta multipla**, solo una tra le cinque risposte proposte è esatta. Saranno assegnati:

- 0 punti per ogni risposta sbagliata,
- 1,5 punti per ogni risposta non data,
- 5 punti per ogni risposta esatta.

Per ogni **problema** verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

La durata della prova è di **tre ore**. È vietato l'uso di qualsiasi strumento di calcolo.

Quesiti

1. Prendendo a caso tre vertici distinti di un poligono regolare con 40 lati, qual è la probabilità che siano vertici di un triangolo rettangolo?
 - A 1/13
 - B 3/38
 - C 1/26
 - D 1/38
 - E 1/39
2. Per quanti interi positivi m il numero m^2+3m è un quadrato perfetto?
 - A uno
 - B nessuno
 - C sei
 - D tre
 - E infiniti
3. In una scacchiera 5×5 ci sono 25 lampadine, una in ogni casella della scacchiera. Inizialmente tutte e 25 le lampadine sono spente. Ogni mossa consiste nel toccare una lampadina L e questo provoca il cambiamento di stato di tutte le lampadine della riga e della colonna della lampadina L , cioè le lampadine spente si accendono e, viceversa, quelle accese si spengono. Dopo m mosse ci si accorge che tutte le 25 lampadine sono accese. Il minimo valore possibile di m è
 - A 3
 - B 10
 - C 5
 - D 25
 - E 13
4. Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è crescente, cioè $f(n+1) \geq f(n)$, ed ha la proprietà che $f(f(n)) = f(n^2)$, per ogni n . Se $f(12) = 9$ allora $f(2006)$ è
 - A 4024036
 - B 9
 - C non univocamente determinato perché dipende dalla scelta di f
 - D 1962
 - E 2003
5. Alice e Bob fanno un gioco in cui, alternandosi, si comunicano un numero naturale. Ad ogni turno si deve dire un numero calcolato nel modo seguente: se n è l'ultimo numero detto dall'avversario, si sceglie una fattorizzazione di n come prodotto di due naturali a e b , e si comunica la somma $a + b$, che non deve essere però superiore ad n . Ad esempio le risposte lecite a 30 sono: $11=5+6$, $13=3+10$, $17=2+15$. Vince il giocatore che non lascia scelte possibili all'avversario.
Nella partita che stanno giocando, Alice inizia con il numero 45. In tale situazione

- A La partita può andare avanti all'infinito
 B Bob vince, qualunque siano le mosse di Alice, ma solo giocando opportunamente
 C Alice vince, qualunque siano le mosse di Bob, ma solo giocando opportunamente
 D Bob vince sicuramente, comunque scelga le proprie mosse
 E Alice vince sicuramente, comunque scelga le proprie mosse
6. Nell'isola di Smullyan vivono infiniti abitanti A_0, A_1, A_2, \dots . Ciascun abitante è un furfante, e allora mente sempre, oppure è un cavaliere, e allora dice sempre la verità. Un giorno, tutti gli abitanti A_{2n} (quelli di indice pari) dicono la seguente frase: "Sull'isola c'è solo un numero finito di cavalieri". Se ne può dedurre che
- A ci sono infiniti furfanti ed un numero finito di cavalieri
 B ci sono infiniti cavalieri ed un numero finito di furfanti
 C ci sono infiniti furfanti, ma non siamo in grado di stabilire se i cavalieri siano in numero finito o infinito
 D ci sono infiniti cavalieri, ma non siamo in grado di stabilire se i furfanti siano in numero finito o infinito
 E ci sono infiniti furfanti e infiniti cavalieri
7. Una piramide di vertice V ha per base un triangolo ABC . I tre spigoli laterali VA, VB, VC sono uguali. Sia H la proiezione ortogonale del punto V sul piano ABC . Allora H
- A può coincidere con uno dei punti A, B, C
 B coincide necessariamente con il circocentro (punto di intersezione degli assi dei lati) di ABC
 C è sempre interno al triangolo ABC
 D coincide necessariamente con l'ortocentro (punto di intersezione delle altezze) di ABC
 E è sempre esterno al triangolo ABC
8. Si lanciano contemporaneamente due dadi, il primo ben equilibrato (nel senso che, in ciascun tiro, le 6 facce si presentano con uguale probabilità), mentre il secondo truccato (nel senso che alcune facce si presentano con maggiore probabilità delle altre). La probabilità che la somma dei numeri che escono sia dispari è
- A $1/2$ comunque sia fatto il dado truccato
 B varia a seconda delle caratteristiche del dado truccato, ma è sempre minore di $3/4$
 C varia a seconda delle caratteristiche del dado truccato, ma è sempre maggiore di $1/4$
 D maggiore di $1/2$, comunque sia fatto il dado truccato
 E minore di $1/2$, comunque sia fatto il dado truccato
9. Se indichiamo con P_n la cifra delle unità del numero 3^n , espresso come al solito in notazione decimale, allora $P_1 + P_2 + \dots + P_{2006}$ vale
- A 10032
 B 13429
 C 23432
 D 9986
 E 9028
10. Quante sono le diagonali in un prisma a base pentagonale? (Per *diagonale* intendiamo un segmento che ha per estremi due vertici non appartenenti ad una stessa faccia)
- A almeno 60
 B 20
 C 10
 D più di 30 ma meno di 60
 E 30

Problemi

1. A ciascuno degli 8 vertici di un cubo assegniamo un valore $+1$ o -1 , e ad ognuna delle 6 facce assegniamo il prodotto dei valori corrispondenti ai suoi 4 vertici. In questo modo abbiamo in tutto $8+6=14$ numeri, che possiamo sommare, indicando con S il risultato.
 - (i) Trovare il massimo valore possibile per S .
 - (ii) Dimostrare che S è sempre pari.
 - (iii) Dimostrare che S non può essere un multiplo di 4.
 - (iv) Trovare il minimo valore possibile per S .

2. Dato un triangolo acutangolo ABC , si traccino le tre altezze AA' , BB' , CC' che si incontrano nell'ortocentro H . Indichiamo come al solito con α, β, γ le ampiezze degli angoli di ABC .
 - (i) Dimostrare che il quadrilatero $AB'HC'$ è inscritto in una circonferenza.
 - (ii) Dimostrare che i triangoli $ABC, AB'C', BC'A', CA'B'$ sono tutti simili fra loro.
 - (iii) Per quali valori di α, β, γ il triangolo $A'B'C'$ è ancora acutangolo?
 - (iv) Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai quattro triangoli ABC, ABH, BCH, CAH hanno lo stesso raggio.

3. È dato un polinomio $p(x)$ di grado n a coefficienti reali.

- (i) Mostrare che $p(x-1)$ è anch'esso un polinomio di grado n .
- (ii) Mostrare che, se $p(x)$ non è costante, allora $p_1(x) = p(x) - p(x-1)$ è un polinomio di grado minore di n .

Continuando in questo modo, possiamo definire i polinomi

$$p_2(x) = p_1(x) - p_1(x-1), \quad p_3(x) = p_2(x) - p_2(x-1), \quad \dots \quad p_{i+1}(x) = p_i(x) - p_i(x-1), \quad \dots$$

- (iii) Mostrare che $p_n(x)$ è costante, cioè che assume lo stesso valore per ogni x .
- (iv) Sia $q(x)$ l'unico polinomio di grado 2005 tale che $q(k) = 2^k$ per ogni intero $0 \leq k \leq 2005$. Determinare $q(2006)$.