RISPOSTE AI QUESITI DELLA PROVA SCRITTA DEL CONCORSO A 50 BORSE DI STUDIO PER STUDENTI UNIVERSITARI DI MATEMATICA
Anno Accademico 2001-2002
(12 settembre 2001)

Soluzioni a cura del dott. Federico Incitti e del prof. Roberto Tortora

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

QUESITO 1. Qual è il resto della divisione fra i polinomi x^6 ed $x^3 - 1$?

(A) -1
(B) 1
(C) $x^3 + 1$
(D) x^3
(E) $x^2 - 1$

SOLUZIONE. La risposta esatta è (B). Ricordando il prodotto notevole

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

si ha

$$x^6 - 1 = \left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right),$$

da cui segue

$$x^6 = \left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) + 1.$$

Quindi il resto della divisione tra i polinomi x^6 e $\left(x^3 - 1\right)$ è 1.

QUESITO 2. Quanto vale la somma dei primi 80 numeri interi positivi: $1 + 2 + 3 + ... + 80$?

(A) 3402
(B) 1225
(C) 2820
(D) 6480
(E) 3240

SOLUZIONE. La risposta esatta è (E). Infatti

$$1 + 2 + 3 + ... + 80 = (1 + 80) + (2 + 79) + ... + (40 + 41) = 81 \cdot 40 = 3240.$$

QUESITO 3. Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte (di cui 10 fiori, 10 picche, 10 cuori e 10 quadri, con 3 figure per ogni seme). Essendo la probabilità di un evento il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero dei casi possibili, qual è la probabilità di estrarre una carta che sia di cuori o una figura?

(A) 22/40
(B) 10/40
(C) 12/40
(D) 19/40
(E) 15/40

SOLUZIONE. La risposta esatta è (D). I casi possibili sono 40. Il numero di casi favorevoli è dato dal numero di carte che sono di cuori o figure. Le carte di cuori sono 10, le figure sono 12 e le figure di cuori sono 3. Se sommiamo il numero di carte di cuori e il numero di figure, stiamo contando due volte le figure di cuori, quindi per ottenere il numero cercato dobbiamo togliere il numero di figure di cuori. Allora il numero di casi favorevoli è dato da

$$10 + 12 - 3 = 19.$$

Quindi la probabilità che venga estratta una carta di cuori o una figura è 19/40.

QUESITO 4. Risolvere la disequazione $\log_{10}\left|\log_{10}\left(x^2 - 3x + 12\right)\right| \leq 0$.

(A) $x > 0$
(B) $x \geq 1$
(C) $1 \leq x \leq 2$
(D) $1/2 \leq x < 1$
(E) la disequazione non ha alcuna soluzione

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). La disequazione $\log_{10} y \leq 0$ ha soluzione $0 < y \leq 1$. Quindi la nostra disequazione ha soluzione

$$0 < \left|\log_{10}\left(x^2 - 3x + 12\right)\right| \leq 1,$$

che possiamo riscrivere come

$$-1 \leq \log_{10}\left(x^2 - 3x + 12\right) \leq 1, \quad \log_{10}\left(x^2 - 3x + 12\right) \neq 0.$$

Questa ha soluzione

$$\frac{1}{10} \leq x^2 - 3x + 12 \leq 10, \quad x^2 - 3x + 12 \neq 1.$$

Osserviamo che la condizione $x^2 - 3x + 12 \neq 1$, che è equivalente a $x^2 - 3x + 11 \neq 0$, è sempre verificata, essendo il delta del trinomio $x^2 - 3x + 11$ negativo e quindi $x^2 - 3x + 11 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Anche la disequazione $x^2 - 3x + 12 \geq 1/10$ è sempre verificata, infatti questa è equivalente a $10x^2 - 30x + 119 \geq 0$ e il delta di $10x^2 - 30x + 119$ è negativo. Allora resta la disequazione $x^2 - 3x + 12 \leq 10$, cioè

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0.$$

Le due radici di $x^2 - 3x + 2$ sono 1 e 2, quindi la soluzione è data da

$$1 \leq x \leq 2.$$

QUESITO 5. Ci sono 4 fogli di carta. Se ne prendono alcuni (non si sa quanti) e si divide ciascuno di essi in 4 foglietti di carta. Poi si prendono alcuni di questi foglietti e si divide ancora ciascuno in 4 parti. Si prosegue così per un certo numero di volte. Alla fine Andrea dice che ci sono, in tutto, 900 pezzi di carta, mentre Bruno sostiene che i pezzi di carta sono 901.

(A) Andrea ha sicuramente torto mentre Bruno potrebbe aver ragione
(B) Bruno ha sicuramente torto mentre Andrea potrebbe aver ragione
(C) hanno sicuramente torto sia Andrea che Bruno
(D) almeno uno dei due ha ragione
(E) in linea di principio, entrambi possono aver ragione

SOLUZIONE. La risposta esatta è (A). Si parte da 4 fogli di carta. Ad ogni divisione al posto di un 1 pezzo di carta se ne ottengono 4, quindi ad ogni divisione il totale dei pezzi di carta aumenta di 3. Ne segue che il numero di pezzi di carta alla fine deve essere 4 più un multiplo di 3, ovvero 1 più un multiplo di 3. Il numero 901 ha questa proprietà mentre 900 no, quindi Bruno potrebbe aver ragione e Andrea ha sicuramente torto.

QUESITO 6. Qual è il minimo numero di quadrati con area 1 cm^2 sufficienti a coprire una circonferena di 3 cm di diametro? (Attenzione: si parla di circonferenza e non di cerchio; i quadrati possono anche sovrapporsi)

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). Il segmento più lungo contenuto nel quadrato di area 1 cm^2 è la sua diagonale che è lunga $\sqrt{2}$ cm. Quindi un tale quadrato copre la porzione massima della circonferenza quando è disposto in modo tale che la sua diagonale coincida con una corda della circonferenza (vedi figura 1).

Si noti che se il quadrato è disposto in questo modo, essendo il lato del quadrato minore del raggio della circonferenza, necessariamente il quadrato copre tutto l'arco di circonferenza più piccolo sotteso dalla corda, che chiameremo arco BD. Infatti in questo caso i segmenti tangenti PB e PD sono contenuti

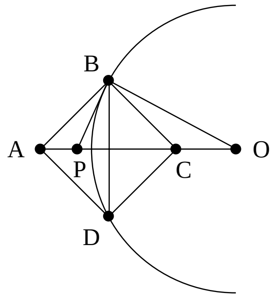

Figura 1: Quesito 6

nel quadrato e l'arco BD, che è contenuto nel quadrilatero $BCDP$, è anch'esso contenuto nel quadrato.

Indichiamo con L_n la lunghezza del lato dell'n-gono regolare inscritto nella circonferenza. Sappiamo che

$$L_n = 2R \sin \frac{\pi}{n},$$

pertanto L_n decresce al crescere di n.

Se $\sqrt{2}$ cm è minore di L_n, non bastano n quadrati per coprire tutta la circonferenza (vedi figura 2). Viceversa, se $\sqrt{2}$ cm è maggiore o uguale a L_n, n quadrati sono sufficienti (vedi figura 3).

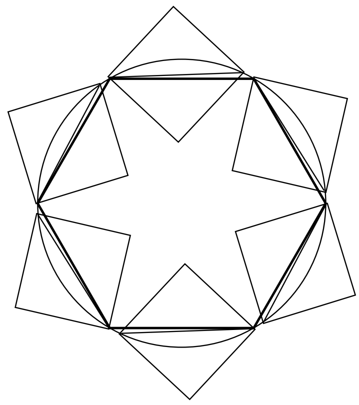

Figura 2: Quesito 6

Quindi stiamo cercando il minimo n per cui $L_n \leq \sqrt{2}$ cm.

Mostriamo che $L_6 > \sqrt{2}$ cm. Il lato dell'esagono regolare è uguale al raggio, quindi $L_6 = 1,5$ cm. Allora

$$L_6 = 1,5 \text{ cm} > 1,41 \text{ cm} \simeq \sqrt{2} \text{ cm}.$$

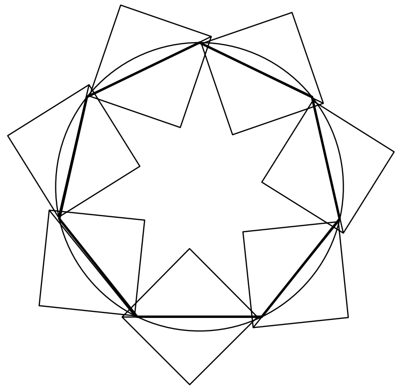

Figura 3: Quesito 6

Mostriamo che $L_7 < \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Se indichiamo con P_7 il perimetro dell'ettagono regolare inscritto nella circonferenza e con C la lunghezza della circonferenza, si ha

$$L_7 = \frac{P_7}{7} < \frac{C}{7} = \frac{3}{7}\pi \text{ cm} \simeq 1,34 \text{ cm} < 1,41 \text{ cm} \simeq \sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Quindi per coprire la circonferenza servono almeno 7 quadrati.

QUESITO 7. Sia BH l'altezza relativa all'ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC e sia P il punto in cui l'asse di AC interseca il cateto maggiore AB. Se D è il punto del segmento CP per il quale si ha $CD = CB$, qual è l'ampiezza dell'angolo $H\widehat{B}D$?

(A) 30°
(B) 40°
(C) 45°
(D) 60°
(E) nessuno dei valori precedenti

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). Poniamo $\alpha = B\widehat{A}C$ (vedi figura 4).

Poiché il triangolo ABC è rettangolo si ha $B\widehat{C}A = 90° - \alpha$. Chiamiamo M il punto medio di AC. I due triangoli AMP e CMP sono entrambi rettangoli, hanno il cateto MP in comune e i cateti AM e CM uguali per costruzione. Quindi i due triangoli sono congruenti e in particolare $P\widehat{C}M = P\widehat{A}M = \alpha$. Quindi

$$B\widehat{C}D = B\widehat{C}A - P\widehat{C}M = (90° - \alpha) - \alpha = 90° - 2\alpha.$$

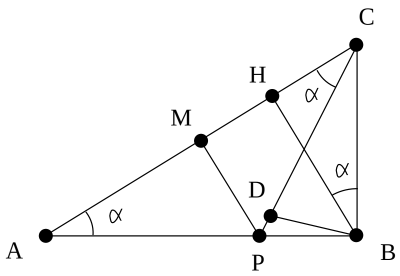

Figura 4: Quesito 7

Per costruzione il triangolo BCD è isoscele con base in BD quindi i suoi angoli alla base sono uguali e valgono

$$C\widehat{B}D = C\widehat{D}B = \frac{180° - B\widehat{C}D}{2} = \frac{90° + 2\alpha}{2} = 45° + \alpha.$$

Poiché il triangolo BHC è rettangolo si ha

$$C\widehat{B}H = 90° - B\widehat{C}H = 90° - (90° - \alpha) = \alpha.$$

Allora

$$H\widehat{B}D = C\widehat{B}D - C\widehat{B}H = (45° + \alpha) - \alpha = 45°.$$

QUESITO 8. Una piramide retta di vertice V ha come base il pentagono regolare $ABCDE$ e le sue facce laterali sono triangoli equilateri. Qual è l'ampiezza dell'angolo AVC?

(A) 60°
(B) 90°
(C) 108°
(D) 120°
(E) non è determinata

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). I triangoli AVC e ABC (vedi figura 5) hanno il lato AC in comune e le coppie di lati AV, AB e VC, BC uguali, in quanto lati di triangoli equilateri. Quindi i due triangoli sono congruenti e in particolare $A\widehat{V}C = A\widehat{B}C$.

Inoltre $A\widehat{B}C$ è l'angolo interno del pentagono regolare $ABCDE$. Essendo la somma delle misure degli angoli interni di un pentagono convesso uguale a $3 \cdot 180°$, la misura dell'angolo $A\widehat{B}C$ è

$$A\widehat{B}C = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°.$$

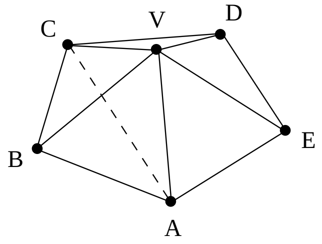

Figura 5: Quesito 8

Quindi si ha anche

$$A\widehat{V}C = 108°.$$

QUESITO 9. Nella popolazione di un paese, dei maschi sono sposati i $2/3$ e tutti con femmine del paese; delle femmine sono sposate i $3/5$ e tutte con maschi del paese. Qual è la frazione di persone non sposate, maschi o femmine, rispetto all'intera popolazione del paese?

(A) $11/15$
(B) $2/15$
(C) $5/19$
(D) $7/19$
(E) i dati sono insufficienti

SOLUZIONE. La risposta esatta è (D). Indichiamo con P il numero totale delle persone della popolazione e con M ed F rispettivamente il numero dei maschi e delle femmine. Poichè il numero degli sposati maschi deve coincidere con il numero delle sposate femmine, si ha

$$\frac{2}{3}M = \frac{3}{5}F,$$

da cui segue

$$F = \frac{10}{9}M.$$

Poichè $P = M + F$ si ha

$$P = M + \frac{10}{9}M = \frac{19}{9}M.$$

Allora

$$M = \frac{9}{19}P, \quad F = \frac{10}{19}P.$$

Infine il numero di persone non sposate è dato da

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) M + \left(1 - \frac{3}{5}\right) F = \frac{1}{3}M + \frac{2}{5}F = \frac{3}{19}P + \frac{4}{19}P = \frac{7}{19}P.$$

QUESITO 10. Un elettrodomestico viene pagato 418 euro, dove il prezzo comprende una tassa del 10%. Se invece si applicasse la tassa del 9%, quanto si risparmierebbe?

(A) meno di 3 euro
(B) fra 3 e 4 euro
(C) fra 4 e 5 euro
(D) fra 5 e 6 euro
(E) più di 6 euro

SOLUZIONE. La risposta esatta è (B). Indichiamo con x il valore non tassato dell'elettrodomestico. Si ha

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)x = 418 \text{ euro},$$

da cui segue

$$x = \frac{10}{11}\cdot 418 \text{ euro} = 380 \text{ euro}.$$

Se si applica una tassa del 9%, si ottiene un prezzo di

$$\left(1+\frac{9}{100}\right)x = \frac{109}{100}\cdot 380 \text{ euro} = 414,2 \text{ euro},$$

con un risparmio di

$$418 \text{ euro} - 414,2 \text{ euro} = 3,8 \text{ euro}.$$

PROBLEMI

PROBLEMA 1. Consideriamo una corona circolare con i raggi di lunghezza 4 e 5.

(i) Quali sono i segmenti più lunghi interamente contenuti nella corona circolare?

(ii) Quali sono i triangoli di area massima contenuti nella corona circolare?

(iii) Quanti triangoli di area massima, contenuti nella corona circolare e non sovrapposti, si devono considerare per coprire almeno i 2/5 della corona circolare?

SOLUZIONE. *(i)* Sono i segmenti tangenti alla circonferenza interna che hanno gli estremi su quella esterna (come ad esempio il segmento MN in figura 6). Nel seguito chiameremo tali segmenti *corde massime.*

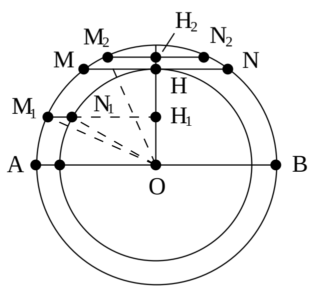

Figura 6: Problema 1

Per ragioni di simmetria possiamo limitarci a considerare i segmenti paralleli ad un diametro AB della circonferenza esterna.

Tra i segmenti contenuti nella corona che hanno distanza dal segmento AB minore di 4 cm possiamo considerare solo quelli che hanno gli estremi sulle due circonferenze (e li chiameremo segmenti *del primo tipo*). Infatti dato un segmento contenuto nella corona che dista da AB meno di 4 cm che non abbia gli estremi sulle due circonferenze, è semplice costruire un segmento che contenga strettamente il segmento dato e che quindi sia più lungo di questo.

In modo analogo tra i segmenti che hanno distanza dal segmento AB compresa tra 4 cm e 5 cm possiamo considerare solo quelli che hanno gli estremi sulla circonferenza esterna (e li chiameremo segmenti *del secondo tipo*).

La lunghezza dei segmenti del primo tipo (ad esempio M_1N_1 in figura 6) aumenta con l'aumentare della distanza da AB. Infatti detta x tale distanza (OH_1 in figura), con $0 \text{ cm} \leq x < 4 \text{ cm}$, la lunghezza dei segmenti è data da (applicando due volte il teorema di Pitagora)

$$l_1(x) \quad = \quad M_1H_1 - N_1H_1 = \left(\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{16 - x^2}\right) \text{ cm} =$$

$$= \quad \left(\frac{1}{\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{16 - x^2}} \right) \text{ cm.}$$

Al crescere di x il denominatore decresce e $l_1(x)$ cresce. Quindi per 0 cm $\leq x < 4$ cm la lunghezza $l_1(x)$ è sempre minore di $l_1(4) = 3$ cm.

La lunghezza dei segmenti del secondo tipo (ad esempio M_2N_2 in figura 6) diminuisce con l'aumentare della distanza da AB. Infatti detta x tale distanza (OH_2 in figura), con 4 cm $\leq x \leq 5$ cm, la lunghezza dei segmenti è data da (applicando il teorema di Pitagora)

$$l_2(x) = 2M_2H_2 = 2\left(\sqrt{25 - x^2}\right) \text{ cm.}$$

Quindi per 4 cm $\leq x \leq 5$ cm la lunghezza $l_2(x)$ è sempre minore di $l_2(4) = 6$ cm.

La massima lunghezza vale allora 6 cm e si ha quando $x = 4$, cioè quando il segmento è una corda massima.

(ii) Sono i triangoli isosceli che come base una corda massima e il terzo vertice sulla circonferenza esterna (ad esempio MNK in figura 7).

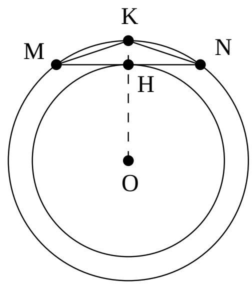

Figura 7: Problema 1

Osserviamo innanzitutto che i tre vertici di un triangolo contenuto nella corona di area massima devono essere tutti e tre su una delle due circonferenze. Se così non fosse infatti ci sarebbe almeno un estremo interno alla corona circolare e sarebbe facile costruire un triangolo di area maggiore.

Dei tre vertici non è possibile che due siano sulla circonferenza interna. Quindi si hanno due casi: a) tutti e tre i vertici su quella esterna oppure b) due vertici su quella esterna e uno su quella interna.

In ciascuno dei due casi il triangolo è contenuto in un rettangolo di dimensioni 3 cm e 1 cm in cui un lato maggiore è una corda massima e l'altro lato maggiore è tangente alla circonferenza esterna (vedi figura 8). Chiameremo un tale rettangolo una *scatola*. Ogni corda massima è base di una scatola. Nel caso a), detti A e B i vertici del triangolo tali che il centro della corona e il terzo vertice si trovino da parti opposte rispetto alla retta AB, la corda massima parallela ad AB che si trova tra AB e il centro della corona è base di una scatola che contiene il triangolo. Nel caso b), detto C il vertice del triangolo che si trova sulla circonferenza interna, la corda massima passante per C è base di una scatola che contiene il triangolo.

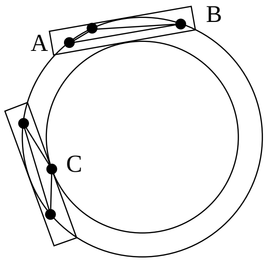

Figura 8: Problema 1

Ora mostriamo che l'area massima di un triangolo contenuto in un rettangolo è la metà dell'area del rettangolo e che i triangoli di tale area sono quelli che hanno un lato in comune con il rettangolo e il terzo vertice sul lato opposto del rettangolo.

Sia $PQRS$ un rettangolo e sia ABC un generico triangolo contenuto in $PQRS$ (vedi figura 9).

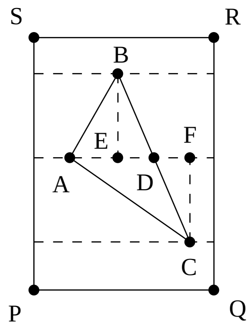

Figura 9: Problema 1

Dobbiamo mostrare che

$$\text{Area}_{ABC} \leq \frac{1}{2}\text{Area}_{PQRS} = \frac{1}{2}PQ \cdot QR.$$

Consideriamo le tre rette parallele a PQ passanti per A, B e C. Almeno una delle tre rette incontra tutti e tre i lati del triangolo. Supponiamo sia quella passante per A. Sia D la sua intersezione con il lato BC. L'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree dei due triangoli ABD e ADC. Siano BE e CF le altezze di questi due triangoli rispetto alla base comune AD. Osserviamo che $AD \leq PQ$ e che $BE + CF \leq QR$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \text{Area}_{ABC} &= \text{Area}_{ABD} + \text{Area}_{ADC} = \frac{AD \cdot BE}{2} + \frac{AD \cdot CF}{2} = \\ &= \frac{1}{2} AD\,(BE + CF) \leq \frac{1}{2} PQ \cdot QR. \end{aligned}$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste o quando il lato AC coincide con PQ e il vertice B si trova su RS, oppure quando il lato BC coincide con QR e il vertice A si trova su PS.

Nel nostro caso gli unici triangoli di area massima all'interno di una scatola che siano anche contenuti nella corona circolare sono i triangoli isosceli che hanno come base una corda massima e il terzo vertice sulla circonferenza esterna.

(iii) Bastano 4 triangoli.
La corona circolare ha area

$$A_C = \left(\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2\right)\ \text{cm}^2 = 9\pi\ \text{cm}^2.$$

Quindi i $2/5$ di tale area valgono

$$\frac{2}{5} A_C = \frac{18}{5} \pi\ \text{cm}^2 \simeq 11,3\ \text{cm}^2.$$

I triangoli di area massima contenuti nella corona hanno area

$$A_T = \frac{6 \cdot 1}{2}\ \text{cm}^2 = 3\ \text{cm}^2.$$

Quindi cerchiamo il minimo intero n per cui

$$n A_T \geq \frac{2}{5} A_C,$$

cioè per cui

$$3n \geq 11,3.$$

Il più piccolo intero che verifica la precedente uguaglianza è $n = 4$.

D'altra parte è possibile disporre 4 triangoli di area massima nella corona senza sovrapposizioni scegliendo 4 triangoli i cui vertici sulla circonferenza esterna coincidano con i vertici di un quadrato inscritto in tale circonferenza (vedi figura 10). Tali triangoli non si sovrappongono. Infatti fissando un riferimento cartesiano con origine nel centro della corona, unità di misura 1 cm e in modo tale che i vertici dei triangoli sulla circonferenza esterna abbiano coordinate $(5,0)$, $(0,5)$, $(-5,0)$ e $(0,-5)$, i 4 triangoli si trovano nelle quattro regioni

$$(4,5) \times (-3,3)\,, \quad (-3,3) \times (4,5)\,, \quad (-5,-4) \times (-3,3)\,, \quad (-3,3) \times (-5,-4)\,,$$

che sono a due a due disgiunte, come è facile verificare.

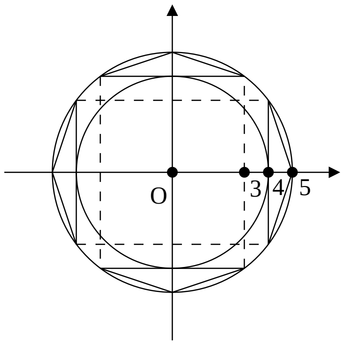

Figura 10: Problema 1

PROBLEMA 2. *(i)* In quali casi la differenza dei quadrati di due numeri interi positivi è uguale alla somma dei due numeri stessi?

(ii) Trovare tutte le coppie di interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 15.

(iii) Ci sono coppie di interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 30?

(iv) Quali interi positivi possono essere espressi come differenza dei quadrati di due interi positivi?

SOLUZIONE. *(i)* Quando i due numeri sono consecutivi. Ricordando il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, possiamo scrivere

$$a^2 - b^2 = a + b$$

come

$$(a+b)(a-b) = a + b.$$

Essendo a e b interi positivi si ha $a + b \neq 0$. Possiamo quindi semplificare per $(a + b)$ ottenendo

$$a - b = 1,$$

cioè

$$a = b + 1.$$

(ii) Le uniche due coppie sono $(8, 7)$ e $(4, 1)$. Cerchiamo due interi positivi a e b tali che

$$a^2 - b^2 = 15,$$

cioè tali che

$$(a+b)(a-b) = 15.$$

Poiché a e b sono interi positivi, la loro somma è un intero positivo e la loro differenza è un intero. Poiché $a^2 - b^2 > 0$ si ha $a > b$, quindi anche la differenza è un intero positivo. Infine, essendo b positivo, la somma è maggiore della differenza.

Il numero 15 può essere scritto come prodotto di interi positivi in due soli modi:

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5.$$

Quindi le coppie cercate sono le soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases}.$$

Dal primo sistema si ottiene $a = 8$, $b = 7$. Dal secondo si ottiene $a = 4$, $b = 1$.

(iii) Non esistono. Se due tali interi positivi a e b esistessero, avremmo

$$(a + b)(a - b) = 30.$$

Ma $a + b$ e $a - b$ sono due interi positivi che hanno la stessa parità, essendo

$$a + b = (a - b) + 2b,$$

quindi sono entrambi dispari o entrambi pari. Se sono entrambi dispari, il loro prodotto è dispari e 30 non lo è. Se sono entrambi pari, il loro prodotto è divisibile per 4 e 30 non lo è.

(iv) I dispari maggiori o uguali a 3 e i multipli di 4 maggiori o uguali a 8.

Poiché $a + b$ e $a - b$ sono entrambi pari o entrambi dispari, condizione necessaria affinché risulti

$$n = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

con n, a, b interi positivi, è che n sia dispari oppure un multiplo di 4. Inoltre è necessario che n sia diverso da 1 e diverso da 4, non potendo essere $a+b$ e $a-b$ entrambi uguali a 1 o entrambi uguali a 2.

Dimostriamo che le condizioni dette sono anche sufficienti.

PRIMO MODO. Un generico dispari maggiore o uguale a 3 si può scrivere nella forma

$$n = 2k + 1,$$

con k intero positivo. Se prendiamo $a = k + 1$ e $b = k$ (interi positivi), si ha

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 2k + 1 = n.$$

Un generico multiplo di 4 maggiore o uguale a 8 si può scrivere nella forma

$$n = 4(k + 1),$$

con k intero positivo. Se prendiamo $a = k + 2$ e $b = k$ (interi positivi), si ha

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = (2k + 2) \cdot 2 = 4(k + 1) = n.$$

SECONDO MODO. Se n è dispari, maggiore o uguale a 3, ponendo $a+b=n$, $a-b=1$, si ha $a=(n+1)/2$, $b=(n-1)/2$ (interi positivi) e

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=n.$$

Se n è un multiplo di 4, maggiore o uguale a 8, ponendo $a+b=2h$, $a-b=2k$, con $hk=n/4$, $h>k$, si ha $a=h+k$, $b=h-k$ (interi positivi) e

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2h\cdot 2k=4hk=n.$$

PROBLEMA 3. Sono dati i polinomi

$$P(x)=x^{56}-3x^{55}-2x^2+5x-1 \quad \text{e} \quad Q(x)=x^2-(a+1)x+a$$

(dove a è un numero reale).

(i) Verificare che P e Q hanno una radice in comune.

(ii) Trovare il resto della divisione di P per Q con $a=0$.

(iii) Trovare il resto della divisione di P per Q per un qualunque valore di a.

SOLUZIONE. *(i)* I due polinomi hanno entrambi la radice 1. Infatti $P(1)=0$ e $Q(1)=0$.

(ii) Se $a=0$ si ha $Q(x)=x(x-1)$, le cui radici sono 0 e 1. In generale, poiché $Q(x)$ è di secondo grado il resto della divisione di $P(x)$ per $Q(x)$ sarà di grado minore o uguale a 1. Detti $A(x)$ e $R(x)$ rispettivamente il quoziente e il resto di tale divisione, si ha

$$P(x)=x(x-1)A(x)+R(x), \tag{1}$$

con

$$R(x)=bx+c,$$

dove b e c sono numeri reali. Calcolando la (1) per $x=1$ si ottiene $R(1)=P(1)$, cioè $b+c=0$. Quindi $c=-b$ e il resto ha la forma

$$R(x)=b(x-1).$$

Calcolando la (1) per $x=0$ si ottiene $R(0)=P(0)$, cioè $-b=-1$. Quindi $b=1$ e il resto vale

$$R(x)=x-1.$$

(iii) In generale si ha $Q(x)=(x-1)(x-a)$, le cui radici sono 1 e a. In questo caso si ha

$$P(x)=(x-1)(x-a)A(x)+R(x). \tag{2}$$

Poiché 1 è radice di $Q(x)$, come visto nel punto *(ii)* il resto ha la forma

$$R(x) = b(x-1).$$

Primo caso) $a \neq 1$. Calcolando la (2) per $x = a$ si ottiene $R(a) = P(a)$, cioè $b(a-1) = P(a)$. Si ottiene

$$b = \frac{P(a)}{a-1} = \frac{a^{56} - 3a^{55} - 2a^2 + 5a - 1}{a-1}.$$

Volendo si può effettuare la divisione con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & 1 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2 & 5 & -1 \\
1 & & 1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 & -2 & -4 & 1 \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 & -4 & 1 & 0
\end{array}$$

ottenendo

$$b = a^{55} - 2a^{54} - 2a^{53} - \ldots - 2a^3 - 2a^2 - 4a + 1.$$

Allora il resto vale

$$R(x) = \left(a^{55} - 2a^{54} - 2a^{53} - \ldots - 2a^3 - 2a^2 - 4a + 1\right)(x-1).$$

Secondo caso) $a = 1$. In questo caso $Q(x) = (x-1)^2$ e la (2) diventa

$$P(x) = (x-1)^2 A(x) + R(x), \qquad (3)$$

dove è ancora

$$R(x) = b(x-1).$$

PRIMO MODO. Derivando la (3) si ha

$$P'(x) = 2(x-1)A(x) + (x-1)^2 A'(x) + b. \qquad (4)$$

Calcolando la (4) per $x = 1$ si ottiene

$$b = P'(1).$$

Essendo

$$P'(x) = 56x^{55} - 165x^{54} - 4x + 5,$$

si ha

$$b = P'(1) = 56 - 165 - 4 + 5 = -108.$$

Quindi il resto vale

$$R(x) = 108(1-x).$$

SECONDO MODO. Dividendo nella (3) ambo i membri per $(x-1)$ si ottiene

$$\frac{P(x)}{x-1} = (x-1)\,A(x) + b. \tag{5}$$

Inoltre, come abbiamo visto nel caso $a \neq 1$ utilizzando la regola di Ruffini, si ha

$$\frac{P(x)}{x-1} = x^{55} - 2x^{54} - 2x^{53} - \ldots - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1.$$

Sostituendo nella (5) e calcolando per $x = 1$, si ha

$$1 - 53 \cdot 2 - 4 + 1 = b,$$

cioè

$$b = -108.$$

Quindi il resto vale

$$R(x) = 108\,(1-x)\,.$$