Istituto Nazionale di Alta Matematica

PROVA SCRITTA DEL 30/09/2004

Istruzioni per lo svolgimento della prova

- Il tempo a disposizione è di 4 ore; è vietato l'uso di libri, appunti, calcolatrici e cellulari.
- Detti p_A e p_B i punteggi riportati, rispettivamente, negli esercizi delle parti A e B, il punteggio complessivo è dato dalla formula
$$p = p_A + p_B + \frac{1}{3}\min\{p_A, p_B\}\,.$$
- Scrivere nome, cognome, luogo e data di nascita sul cartoncino e chiudere quest'ultimo nella busta piccola; mettere la busta piccola nelle grande, aggiungere i fogli con lo svolgimento e il testo, e chiudere il plico. Importante: NON scrivere il proprio nome, né alcun possibile segno di riconoscimento, in nessuna altra parte dell'elaborato.

Gruppo A

1. Siano x, y e z gli angoli interni di un triangolo nel piano. Dimostrare che
$$\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{y}{2}\,\sin\frac{z}{2} \le \frac{1}{8}\,.$$
In quale caso vale l'uguaglianza? [Punti 9]

2. Si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-nx^2}}{n^2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$
   (a) Studiare la convergenza della serie data. [Punti 3]
   (b) Detta $f(x)$ la somma, definita sull'insieme di convergenza della serie, dire in quali punti f è derivabile. [Punti 3]
   (c) Calcolare $f'(\sqrt{\log 2})$. [Punti 3]

3. Un punto materiale di massa unitaria si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie del cono di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 : \quad z > 0$$

Il punto è soggetto alla forza di gravità $-\hat{z}$.

Si consideri la famiglia di dati iniziali

$$x_0 = 0 \, , \quad y_0 = z_0 = 1 \, , \quad \dot{x}_0 = u \, , \quad \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \, .$$

(a) Si determinino i valori di u per cui il punto non raggiunge mai l'origine. [Punti 6]

(b) Si determinino i valori di u che danno luogo ad un moto periodico. [Punti 3]

4. Un punto materiale di massa unitaria si muove su di una retta ed è soggetto alla forza $F(x)$ di energia potenziale ($F = -V'$)

$$V(x) = -\frac{1}{1+x^2} \, .$$

Si consideri la famiglia di traiettorie con dati iniziali

$$x(0) = 0 \, , \quad \dot{x}(0) = u \in \mathbb{R} \, .$$

(a) Al variare di u si determini, se esiste, il $\lim_{t\to\infty} x(t)$. [Punti 3]

(b) Per $|u|$ sufficientemente piccolo le traiettorie sono periodiche. Detto $T(u)$ il loro periodo si determini il $\lim_{u\to 0} T(u)$. [Punti 6]

5. Sia $x :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + x(t)[t^3 x(t) + f(t)] = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

dove f è un'assegnata funzione continua su $\mathbb{R}$.

(a) Giustificare il fatto che $x(t) > 0$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$. [Punti 3]

(b) Supponiamo ora che

$$tf(t) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Dedurre che $x(t) \leq 1$ per ogni t. [Punti 3]
- Provare che $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$. [Punti 3]
- Calcolare $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$. [Punti 3]

(c) Calcolare $x(t)$ nel caso particolare $f(t) \equiv t$. [Punti 6]

6. Calcolare l'integrale improprio $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ procedendo per tappe come segue.

(i) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

per $t > 0$. [Punti 3]

(ii) Detto $I(t)$ il valore dell'integrale di cui al punto (i), dimostrare che $I(\cdot)$ è derivabile per ogni $t \in]0,\infty[$. [Punti 3]

(iii) Derivando sotto il segno di integrale, calcolare $I'(t)$ per $t \in]0,\infty[$. [Punti 3]

(iv) Usando il risultato del punto (iii), calcolare $I(t)$ per ogni $t \in]0,\infty[$. [Punti 6]

(v) Supponendo $I(\cdot)$ continua in 0, calcolare $I(0)$. [Punti 3]

Gruppo B

1. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ determinare un massimo comun divisore di 5 e $3-i$. [Punti 9]

2. Sia $F_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

in cui λ è un parametro reale. Determinare i valori di λ per cui F_λ è diagonalizzabile. Per tali valori determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di F_λ. [Punti 9]

3. Sia Γ la curva di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che i piani osculatori affini di Γ nei punti $A = (0,0,0)$, $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e $C = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ si incontrano in un punto contenuto nel piano determinato da A, B, C. [Punti 9]

4. Sia

$$X = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

(a) Determinare l'immagine di X tramite l'applicazione

$$f(z) = e^{iz} \qquad \text{[Punti 6]}$$

(b) Dire se f induce un omeomorfismo di X su $f(X)$ giustificando la risposta. [Punti 3]

5. Si consideri il polinomio

$$f(X) = X^3 + 3X + 2 \in F_5[X]$$

dove $F_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(a) Determinare un campo di spezzamento K di $f(X)$. [Punti 6]

(b) Determinare tutte le radici di $f(X)$ in K. [Punti 6]

(c) Dire se il polinomio $X^3 + 1$ ha tutte le sue radici in K. [Punti 6]

6. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica:

$$q(x, y, z) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_3^2$$

e la corrispondente forma diagonale. [Punti 18]