Al Consiglio Scientifico del GNCS
Piazzale Aldo Moro 5, Roma

Relazione sul progetto di ricerca - GNCS 2015

Conservazione numerica di proprietà qualitative delle soluzioni di problemi differenziali ed integrali

Responsabile: Angelamaria Cardone
Ricercatore Universitario confermato
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno,
tel. 089 9623342, email: ancardone@unisa.it
Numero dei partecipanti: 8
Partecipanti: Angelamaria Cardone, Dajana Conte, Giuseppe De Martino, Giuseppe Izzo, Eleonora Messina, Beatrice Paternoster, Woula Themistoclakis, Antonia Vecchio
Finanziamento: 4000 Euro

Contents

1 Attività di ricerca 2
2 Comunicazioni 5
3 Lavori scientifici 5
3.1 Lavori sottomessi 7

1 Attività di ricerca

Il progetto ha rigurdato l'analisi di modelli numerici che riproducano l'andamento qualitativo della soluzione e/o che preservino proprietà e invarianti caratteristici del problema in esame. Si pensi ad esempio alle oscillazioni nei problemi periodici, alla conservazione dell'energia nei problemi Hamiltoniani, alla positività delle soluzioni e alle biforcazioni di taluni modelli biologici. I problemi considerati sono equazioni differenziali ordinarie (ODEs), equazioni integrali di Volterra (VIEs) ed equazioni integro-differenziali anche a carattere non-locale.

L'attività di ricerca svolta nell'ambito delle equazioni differenziali ha riguardato ODEs del primo e del secondo ordine e problemi Hamiltoniani.
Sistemi di ODEs generati dalla semidiscretizzazione di problemi di reazione-diffusione o di avvezione-diffusione, hanno soluzioni dominate da una componente stiff e una componente non-stiff. Al fine di riprodurre accuratamente l'andamento della soluzione e di ottenere tempi di calcolo ragionevoli, si possono adottare metodi IMEX, che trattano in maniera implicita la parte stiff e in maniera esplicita la parte non-stiff del problema. In [P2] sono stati introdotti metodi IMEX GLM di tipo partizionato, che hanno proprietà di stabilità ottimali e non subiscono il fenomeno della riduzione dell'ordine, come ad esempio i metodi IMEX Runge-Kutta; in [SP3] sono stati introdotti metodi IMEX generati da un'approssimazione non polinomiale della soluzione, per problemi di avvezione-diffusione a decadenza esponenziale nello spazio e nel tempo. In [P7, SP7] e nelle comunicazioni [C3, C5], sono stati discretizzati, mediante opportune tecniche di fitting esponenziale e trigonometrico, problemi di reazione-diffusione modellizzati da equazioni non lineari di tipo $\lambda - \omega$, le cui soluzioni fondamentali sono onde piane, periodiche in spazio e tempo. Infine, poichè la discretizzazione nello spazio di PDEs conduce spesso alla formulazione di sistemi di ODEs a grandi dimensioni, è stato sviluppato un algoritmo parallelo basato su metodi Waveform Relaxation, per l'implementazione su GPUs (Graphical Processing Units). I risultati ottenuti sono stati illustrati nella comunicazione [C2] e nel lavoro [P4].

Per quanto riguarda i sistemi di ODEs del second'ordine, è stata condotta un'analisi dei metodi multi-value di tipo Nordsieck, per studiare la stabilità, l'ordine di convergenza e per derivare stime dell'errore accurate. I risultati ottenuti sono stati illustrati nella comunicazione [C1] e nei lavori [P6, P8, P10]. Per l'integrazione geometrica di problemi Hamiltoniani, sono stati costruiti metodi numerici di tipo multi-value simmetrici che generano componenti parassite limitate. Tali metodi conservano la simpletticità nello spazio delle fasi su intervalli di tempo sufficientemente lunghi e ad un basso costo computazionale [P9]. In [P1] sono state derivate condizioni d'ordine generali per i metodi GLM, che lasciano molti parametri liberi da poter utilizzare per imporre proprietà quali la G-simpletticità.

In [P13-P15] è stato analizzato il comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni di Volterra su time scales. Il crescente interesse per questo tipo di problemi sta nel fatto che essi rappresentano uno strumento importante per la modellizzazione di fenomeni con memoria in diversi ambiti applicativi. Lo studio effettuato contiene ed estende alcuni risultati della teoria classica per equazioni continue e discrete di Volterra e fornisce strumenti utili per l'analisi della stabilità di metodi numerici. In questo contesto, dunque, è stata sviluppata una teoria della stabilità numerica che fa riferimento a classi di problemi test alquanto generali e rappresentative nelle applicazioni. I risultati, descritti in [P14] e [SP10], evidenziano proprietà di stabilità condizionata al passo di integrazione e, in casi particolari, risultati di stabilità incondizionata, per metodi di quadratura diretta di qualunque ordine. Tali ricerche sono state anche oggetto delle comunicazioni [C1] e [C3]. Inoltre in [P15] è stato considerato un modello epidemico di tipo SIS basato su una equazione integrale di Volterra non lineare ed è stato analizzato il comportamento dello schema numerico ottenuto con metodi di quadratura diretta in termini di punti di biforcazione e stabilità degli equilibri.

VIEs con soluzione periodica sono state integrate mediante metodi di quadratura diretta exponentially fitted di tipo gaussiano, i cui parametri dipendono da una stima della frequenza della soluzione. L'adattamento del metodo alle caratteristiche del problema permette di seguire accuratamente le oscillazioni senza subire forti restrizioni sul passo di integrazione. Tale vantaggio, rispetto ai metodi classici, è ancora più evidente per frequenze alte [P3, SP2]. Inoltre, per problemi con soluzione altamente oscillante, sono state costruite formule di quadratura ef di tipo Gauss-Laguerre, il cui errore decresce all'aumentare della frequenza [P5].

Sistemi dinamici con memoria possono essere efficacemente modellizzati da problemi di reazione-diffusione frazionari rispetto al tempo. Sono stati introdotti metodi globali di tipo spettrale lungo il tempo, su una base di tipo potenze ad esponente frazionario, che ben riproduce l'andamento della soluzione analitica. Tali metodi hanno un basso costo computazionale ed hanno velocità di convergenza esponenziale. Inoltre per la discretizzazione spaziale è stato scelto uno schema alle differenze finite adattato al problema. I risultati ottenuti sono riportati in [SP1] e sono stati illustrati nella comunicazione [C4].

In [P17-P19] sono state studiate diverse classi di problemi integro-differenziali non standard con assegnate condizioni ai limiti, le quali derivano dalla modellizzazione di alcuni problemi fisici, come ad esempio cinetica dei plasmi, equilibrio di termodinamica, stabilità aeroelastica. Tali equazioni sono caratterizzate da una non linearità di tipo non locale, a causa di un integrale della funzione incognita tra i coefficienti del problema differenziale stesso. Per ciascun modello sono stati proposti metodi numerici ad hoc e sono stati dimostrati teoremi di esistenza e unicità della soluzione (sia analitica che numerica) e teoremi di convergenza .

Oltre ad approssimazioni basate su spazi di funzioni di tipo esponenziale o trigonometrico, è stata considerata un'approssimazione polinomiale mediante interpolazione negli zeri di Jacobi, basata su medie discrete di tipo de la Vallée Poussin. Tale approssimazione risulta particolarmente vantaggiosa nel caso di funzioni quasi ovunque regolari con alcuni punti isolati di singolarità. I risultati ottenuti sono contenuti in [SP12] e sono stati oggetto della comunicazione [C8].

2 Comunicazioni

Le attività finanziate con il contributo, parziale o totale, dei fondi del progetto, sono le seguenti.

[C1] Comunicazione su invito: B. Paternoster, *Trattamento numerico conservativo di equazioni differenziali: sviluppi recenti e prospettive future*, nel simposio 'Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie' organizzato dal prof. Bellen, XX Congresso dell'UMI, Siena, 7-12 settembre 2014.

[C2] Comunicazione su invito: D. Conte, R. D'Ambrosio, B. Paternoster, *Risoluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali di grandi dimensioni su GPUs*, XX Congresso dell'UMI, Siena, 7-12 settembre 2014.

[C3] Comunicazione su invito: B. Paternoster, *Numerical treatment of reaction-diffusion problems by trigonometrically fitted methods*, nel simposio 'Time integration of partial differential equations', organizzato dal prof. Ostermann e dalla prof.ssa Hochbruck, SciCADE, Potsdam, (Germania), 13-18 settembre 2015.

[C4] K. Burrage, A. Cardone, R. D'Ambrosio, B. Paternoster, *Numerical solution of time-fractional reaction-diffusion systems*, nella sessione 'Time fractional differential equations', (chair A. Cardone). SciCADE, Potsdam, (Germania), 13-18 settembre 2015.

[C5] R. D'Ambrosio, M. Moccaldi, B. Paternoster, *Metodi numerici impliciti-espliciti adattati per problemi di reazione-diffusione semidiscretizzati*, XX Congresso dell'UMI, Siena, 7-12 settembre 2014.

[C6] E. Messina, A. Vecchio, *Stability of numerical approximations to Volterra integral equations*, NETNA 2015, Falerna (CZ), dal 18 al 21 Giugno 2015.

[C7] E. Messina, A. Vecchio, *Long-time behavior of Volterra integral equations on time scales and stability of numerical methods*, SciCADE, Potsdam, (Germania), 13-18 settembre 2015.

[C8] W. Themistoclakis, *Near best discrete polynomial approximation via de la Vallee Poussin means*, MASCOT2015, Roma, 9-12 giugno, 2015.

3 Lavori scientifici

I lavori elencati di seguito sono stati realizzati nell'ambito del progetto e recano il ringraziamento al INdAM-GNCS.

[P1] A. Cardone, Z. Jackiewicz, J.H. Verner, B. Welfert, Order conditions for general linear methods. J. Comput. Appl. Math. 290 (2015), 4464.

[P2] A. Cardone, Z. Jackiewicz, A. Sandu, H. Zhang, Construction of highly stable implicit-explicit general linear methods, DCDS Supplements, Volume 2015 (2015), Issue special, 185-194.

[P3] A. Cardone, L.Gr. Ixaru, B. Paternoster, G. Santomauro, Ef-Gaussian direct quadrature methods for Volterra integral equations with periodic solution, Math. Comput. Simul. 110 (2015), 125143.

[P4] D. Conte, R. D'Ambrosio, B.Paternoster, GPU-acceleration of waveform relaxation methods for large differential systems, Numer. Algor. 71, no.2, (2016) 293–310.

[P5] D. Conte, B. Paternoster, Modified Gauss-Laguerre exponential fitting based formulae, J. Sci. Comput., in fase di revisione.

[P6] R. D'Ambrosio, M. Moccaldi, B. Paternoster. Highly stable multivalue numerical methods, AIP Conf. Proc. 1648, 150005, p. 1-4 (2015)

[P7] R. D'Ambrosio, B. Paternoster, Numerical solution of reaction-diffusion systems of $\lambda - \omega$ type by trigonometrically fitted methods, J. Comput. Appl. Math. 294 (2016) 436-445. Disponibile on line dal 20 agosto 2015.

[P8] R. D'Ambrosio, G. De Martino, B. Paternoster, General Nystrom methods in Nordsieck form: error analysis, J. Comput. Appl. Math. 294, 694-702 (2016). Disponibile on line dal 1 Maggio 2015.

[P9] R. D'Ambrosio, G. De Martino, B. Paternoster, A symmetric nearly preserving general linear method for Hamiltonian problem, DCDS Supplements, Vol. 2015 (2015), no. special, 330339.

[P10] R. D'Ambrosio, B. Paternoster, A general framework for numerical methods solving second order differential problems, Math. Comput. Simul. 110, 113-124 (2015).

[P11] G. Izzo, Z. Jackiewicz, Strong stability preserving multistage integration methods, Math. Model. Anal. 20, no. 5, 2015, 552-577.

[P12] G. Izzo, Z. Jackiewicz, Strong Stability Preserving General Linear Methods, J. Sci. Comput., 65 (1), 271-298 (2015).

[P13] E. Messina, A. Vecchio, Stability and Convergence of Solutions to Volterra Integral Equations on Time Scales. Discrete Dyn. Nat. Soc. 2015, Art. ID 612156, 6 pp.

[P14] E. Messina, E. Russo, A. Vecchio, Volterra integral equations on time scales: stability under constant perturbations via Liapunov direct method, Ricerche di Matematica, 64, Issue 2 (2015), 345355.

[P15] E. Messina, A. Vecchio. Nonlinear stability of direct quadrature methods for Volterra integral equations, Math. Comput. Simulation 110 (2015), 155-164.

[P16] E. Messina, Numerical simulation of a SIS epidemic model based on a nonlinear Volterra integral equations, DCDS Supplements, Vol. 2015, Issue special, 2015, p 826-834.

[P17] W. Themistoclakis, A. Vecchio, On the numerical solution of some nonlinear and nonlocal boundary value problems, Appl. Math. Comput. 255 (2015) 135146.

[P18] W. Themistoclakis, A. Vecchio, On the numerical solution of a nonlocal boundary value problem, J. Comput. Appl. Math. 292 (2016) 720731. Disponibile on line dal 4 marzo 2015.

[P19] M. Basile, E. Messina, W. Themistoclakis, A. Vecchio, Convergence of a numerical method for the solution of non-standard integro-differential boundary value problems. Math. Comput. Simulation 110 (2015), 144154.

3.1 Lavori sottomessi

[SP1] K. Burrage, A. Cardone, R. D'Ambrosio, B. Paternoster, Numerical solution of time fractional diffusion systems, sottomesso.

[SP2] A. Cardone, R. D'Ambrosio, B. Paternoster, High order exponentially fitted methods for Volterra integral equations with periodic solution, sottomesso.

[SP3] A. Cardone, R. D'Ambrosio, B. Paternoster, Exponentially fitted IMEX methods for advection-diffusion problems, sottomesso.

[SP4] D. Conte, G. Capobianco, B. Paternoster, Construction and implementation of two-step continuous methods for Volterra Integral Equations, sottomesso.

[SP5] D. Conte, B. Paternoster, Parallel methods for weakly singular Volterra Integral Equations on GPUs, sottomesso.

[SP6] R. D'Ambrosio, B. Paternoster, Multivalue collocation methods for stiff differential systems, sottomesso.

[SP7] R. D'Ambrosio, M. Moccaldi, B. Paternoster, Adapted IMEX methods for reaction-diffusion problems, sottomesso.

[SP8] G. Izzo, Z. Jackiewicz, Highly stable implicit-explicit Runge-Kutta methods, sottomesso.

[SP9] M. Bras, G. Izzo, Z. Jackiewicz, Implicit-explicit general linear methods with inherent Runge-Kutta stability, sottomesso.

[SP10] E. Messina, A. Vecchio, Stability and boundedness of numerical approximations to Volterra integral equations, sottomesso.

[SP11] E. Messina, A. Vecchio, Stability analysis of linear Volterra equations on time scales under bounded perturbations, sottomesso ad Appl. Math. Lett.

[SP12] W. Themistoclakis, Weighted L_1 approximation on $[-1, 1]$ via discrete de la Vallee Poussin means, sottomesso.

15 febbraio 2015

Dott.ssa Angelamaria Cardone

Angelamaria Cardone