Relazione scientifica sul progetto “Analisi numerica di sistemi dinamici infinito-dimensionali e non regolari”

Responsabile: Nicola Guglielmi
guglielm@univaq.it

Progetti di Ricerca - GNCS 2015

Finanziamento ottenuto: 7400 Euro

1 Presentazione

Il progetto ha riguardato alcuni temi recenti inerenti i sistemi dinamici infinito dimensionali, tipicamente di equazioni funzionali, ed alcune classi di equazioni differenziali non regolari, coinvolgendo ricercatori delle Università di Bari, L'Aquila, Trieste e Udine.

2 Sintesi dei risultati scientifici

Nell'ambito dei sistemi infinito dimensionali funzionali, si è continuata la ricerca per lo sviluppo di metodi numerici efficienti per studiare il comportamento qualitativo e quantitativo di dinamiche descritte da Retarded Functional (Differential) Equations (RFDE/RFE) accoppiate, di recente interesse ed applicazione nel contesto delle popolazioni fisiologicamente strutturate. Inizialmente parte dell'attività si è concentrata sull'adattamento e l'applicazione delle collocazioni pseudospettrali al calcolo di orbite periodiche e successiva analisi di stabilità per modelli con ritardo di dinamiche ospite-parassita [6]. L'esperienza acquisita in questo contesto ha aiutato l'estensione degli approcci alle equazioni di rinnovo [3], per le quali si è completato lo sviluppo del metodo per l'approssimazione dei moltiplicatori caratteristici nella sua versione più generale per problemi accoppiati. Parallelamente è proseguita la ricerca nella direzione dei problemi nonlineari [2,3] con l'ulteriore applicazione dell'approccio generatore infinitesimale a problemi realistici, migliorando notevolmente gli aspetti di efficienza computazionale e di interfacciamento con gli esistenti software di biforcazione per equazioni ordinarie. Prosegue in tal senso anche la rigorosa analisi di convergenza, come per il caso lineare periodico.

Le equazioni differenziali con ritardo astratte sono l'estensione alla dimensione infinita delle equazioni differenziali con ritardo. In questo contesto la stabilità degli equilibri è determinata dallo spettro essenziale e quello non-essenziale del generatore

infinitesimale del corrispondente sistema linearizzato. Nel lavoro [8] la tecnica di discretizzazione pseudospettrale (sviluppata da alcuni ricercatori del progetto, [5]) è stata estesa per l'approssimazione dello spettro non-essenziale ed applicata allo studio di un modello del campo neuronale con ritardo nella trasmissione di una singola popolazione di neuroni.

Nel lavoro [7] la teoria "Polynomial Chaos" è stata applicata per quantificare l'effetto dell'incertezza dei parametri descritti da variabili aleatorie sulla proprietà di stabilità di sistemi di equazioni differenziali con ritardo lineari o linearizzati. Sulla base di una formulazione astratta, sono state studiate la buona posizione del problema iniziale associato e le proprietà di stabilità. Infine è stato proposto un numerico che risolve il problema agli autovalori stocastico ottenuto dalla discretizzazione del generatore infinitesimale con il metodo di collocazione. L'analisi è stata completata con risultati sperimentali. Tale lavoro è stato presentato nella comunicazione [7].

Si è inoltre studiata la convergenza di metodi di collocazione, anche di tipo pseudospettrale, applicati a problemi al contorno per RFDE nei lavori [24], [25] e [26]. Questi argomenti sono stati presentati nella comunicazione [9].

Nell'ambito dei sistemi dinamici discontinui ci si è dedicati a tre filoni principali. Come primo filone si sono studiate le proprietà qualitative di sistemi dinamici retti da equazioni discontinue, sia su un piano analitico che numerico. Come secondo filone si sono studiate alcune relazioni tra la dinamica di un sistema discontinuo, guidata da scelte di specifici campi vettoriali, nel senso di Filippov e quella dello stesso sistema regolarizzato. Come terzo argomento, si è studiata la dinamica di perturbazione singolare per soluzioni deboli (di scivolamento) su varietà di codimensione 2 di un sistema discontinuo regolarizzato.

Nell'ambito dei sistemi discontinui sono stati affrontati diversi aspetti, sia teorici che numerici, legati per lo più al comportamento delle soluzioni di scivolamento su una superficie S a co-dimensione 2. In un primo sforzo sono state caratterizzate le soluzioni stabili di scivolamento del problema discontinuo. In seguito, sia che il sistema discontinuo sia pensato come una idealizzazione di un dato sistema multiscala, sia che lo si consideri come un vero e proprio modello reale, è risultato opportuno studiare il comportamento al limite di opportune soluzioni regolarizzate per poterlo confrontare con quello delle soluzioni di scivolamento. A tal fine è stata utilizzata la teoria della perturbazione singolare che ha consentito di riformulare i problemi multiscala in un intorno di S , in opportuni sistemi planari. Dall'analisi del comportamento dinamico delle soluzioni di tali sistemi sono state tratte importanti conclusioni quali: i) Se S è attrattiva sia le soluzioni del problema discontinuo che quelle regolarizzate restano in un intorno di S ; ii) Soluzioni stabili regolarizzate non convergono necessariamente a soluzioni stabili di scivolamento del problema discontinuo.

Da un punto di vista più squisitamente numerico, sono state utilizzate tecniche che, se pur non efficienti, siano in grado di rispecchiare il comportamento qualitativo delle soluzioni di scivolamento stabili. La difficoltà principale è dovuta al fatto che un integratore a passo costante ha una propria dinamica. Inoltre non esistono risultati per sistemi dinamici discontinui simili a quelli ben noti per sistemi regolari e che garantiscono l'esistenza di un insieme attrattivo del metodo numerico che converge (nella metrica di

Hausdorff) all' attrattore del problema teorico di partenza. Per ovviare a questo inconveniente sono stati utilizzati metodi numerici a passo random che consentono di recuperare il comportamento delle soluzioni stabili di scivolamento su S del problema discontinuo. Va evidenziato che gli integratori stiff applicati direttamente al problema discontinuo o anche al problema regolarizzato, non riescono a riprodurre il comportamento qualitativo delle soluzioni stabili e spesso falliscono nel determinare le uscite da S e dunque non costituiscono una valida alternativa.

Inoltre (si veda il lavoro [14]) si sono studiati gli effetti di regolarizzazioni naturali basati su approssimazioni continue della funzione gradino di Heavyside per quanto riguarda i fenomeni di passaggio da una soluzione debole ad una classica. In particolare sono stati evidenziati alcuni limiti di integratori per problemi di tipo stiff, come per esempio i metodi di Radau IIa, in cui la eccessiva stabilità numerica può creare artefatti numerici. Questo significa che l'integrazione del problema singolarmente perturbato deve essere gestita con particolare attenzione per questo tipo di problemi, in particolare per quel che riguarda le tecniche di controllo del passo nella fase di uscita della soluzione (fase quindi instabile, in cui va evitato il damping del metodo).

Nell'ambito dello studio dei sistemi dinamici discontinui a commutazione, al fine di analizzarne la stabilizzabilità, ci si è dedicati a definire e studiare preliminarmente gli strumenti geometrici necessari, e cioè i "multiconi" e la loro invarianza per famiglie di matrici. Si è potuto generalizzare opportunamente la teoria di Perron-Frobenius che vale per le matrici che possiedono un cono invariante.

Infine si sono studiate ulteriormente le proprietà di stabilità uniforme dei sistemi a commutazione di tipo generale, sia discreti che continui. Nel caso continuo è stato costruito un algoritmo convergente per l'approssimazione degli esponenti di Lyapunov (inferiore e superiore, cioè legati alla minima e massima crescita possibile delle soluzioni). Il problema del minimo esponente però si limita al caso di famiglie di operatori di tipo Metzler, i cui esponenti cioè possiedono un cono invariante. Alcuni componenti del gruppo si sono dedicati ad una interessante generalizzazione - cosiddetta dei multiconi invarianti - e alla loro caratterizzazione geometrica.

Inoltre, nell'ambito dell'analisi spettrale di famiglie di matrici, si è continuato a studiare il problema della coalescenza tra autovalori per famiglie di matrici reali simmetriche o complesse Hermitiane *a banda*, dipendenti da due o più parametri. Le tecniche di continuazione di decomposizioni spettrali, sono state impiegate per stimare come la densità di punti di coalescenza tra autovalori di famiglie di matrici del Gaussian Orthogonal (resp. Unitary) Ensemble a banda dipendenti da 2 (resp. 3) parametri dipenda dalla banda. La criticità di tali calcoli ha reso obbligatorio l'uso del cluster di calcolo scientifico ad alte prestazioni denominato FoRCE, messo gentilmente a disposizione del Dott. Pugliese da parte del Georgia Institute of Technology.

Per quanto riguarda i problemi di robustezza di un sistema dinamico lineare e cioè la capacità di un operatore di mantenere una proprietà chiave anche quando soggetto a perturbazioni (tipicamente con una certa struttura se questa caratterizza l'operatore), si sono ottenuti ulteriori risultati in particolare nei lavori [12] e [21].

3 Sintesi delle attività del progetto

I fondi del progetto sono stati utilizzati per diverse missioni scientifiche da parte dei ricercatori coinvolti nel progetto.

Sono state finanziate le visite scientifiche ad Atlanta (Georgia Institute of Technology) da parte di Cinzia Elia e di Alessandro Pugliese nell'ambito di collaborazioni sui temi del progetto con il Professor Luca Dieci. Infine è stato possibile finanziare o cofinanziare la visita presso l'Università di Utrecht da parte di Breda, Liessi e Vermiglio, per collaborazioni scientifiche con i proff. Diekmann e Gyllenberg (Utrecht 16-19 maggio 2016).

È stato possibile finanziare o cofinanziare la partecipazione da parte di alcuni membri del progetto ai congressi

- Workshop “Short Thematic Program on DDEs”, Toronto, 19-22 maggio 2015
- “XX Congresso dell’Unione Matematica Italiana”, Siena, 7–12 settembre 2015
- Conferenza SDIDE 2016 (Stability and discretization issues in differential equations), Trieste, 21–24 Giugno 2016.

4 Pubblicazioni del gruppo sui temi del progetto nel periodo 1/2015 – 6/2016

- 1 E. Beretta and D. Breda: *Discrete or distributed delay? Effects on stability of population growth*, Mathematical Biosciences and Engineering, vol. 13, pp. 19–41 (2015)
- 2 D. Breda, O. Diekmann, M. Gyllenberg, F. Scarabel and R. Vermiglio: *Pseudospectral discretization of nonlinear delay equations: new prospects for numerical bifurcation analysis*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 15 (1), pp. 1–23 (2016).
- 3 D. Breda, O. Diekmann, D. Liessi and F. Scarabel: *Numerical bifurcation analysis of a class of nonlinear renewal equations*, in preparation (2016).
- 4 D. Breda, P. Getto, J. Sánchez Sanz and R. Vermiglio: *Computing the eigenvalues of realistic Daphnia models by pseudospectral methods*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 37 (6) pp. 2607–2629 (2015).
- 5 D. Breda, S. Maset and R. Vermiglio: *Stability of linear delay differential equations - A numerical approach with MATLAB*, SpringerBriefs in Control, Automation and Robotics, Springer, New York, 2015.
- 6 V. Clamer, A. Pugliese, D. Liessi and D. Breda: *Multi Host-Parasitoid Interactions and Coexistence of Different Hosts*, in preparation (2016).

- 7 R. Vermiglio: *Polynomial Chaos expansions for the stability analysis of uncertain delay differential equations*, submitted for publication (2015).
- 8 R. Vermiglio *Numerical approximation of the non-essential spectrum of abstract delay differential equations*, Mathematics and Computers in Simulation, vol. 125, pp. 56–69 (2016).
- 9 L. Dieci, C. Elia, L. Lopez: *Uniqueness of Filippov sliding vector field on the intersection of two surfaces in $\mathbb{R}^3$ and implications for stability of periodic orbits*, J. Nonlinear Sci. (25) 2015, 1453-1471.
- 10 L. Dieci, C. Elia, L. Lopez: *Sharp sufficient attractivity conditions for sliding on a co-dimension 2 discontinuity surface*, Mathematics and Computers in Simulation, 110, 1, 2015, 3-14.
- 11 L. Dieci, C. Elia, *Piecewise smooth systems near a co-dimension 2 discontinuity manifold: can one say what should happen?*, Special Issue in DCDS-S, 9,4, (2016), 1039-1068.
- 12 N. Guglielmi, D. Kressner and Ch. Lubich: *Low rank differential equations for Hamiltonian matrix nearness problems*, Numerische Mathematik, vol. 129, pp. 279–319, 2015.
- 13 N. Guglielmi, M.L. Overton and G.W. Stewart: *An efficient algorithm for computing the generalized null space decomposition*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 36, pp. 38–54, 2015.
- 14 N. Guglielmi and E. Hairer: *Solutions leaving a codimension-2 sliding* submitted.
- 15 P. Buttà, N. Guglielmi, M. Manetta and S. Noschese: *Differential equations for real-structured (and unstructured) defectivity measures*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 36, pp. 523–548, 2015.
- 16 N. Guglielmi, L. Laglia and V.Yu. Protasov: *Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS*, Foundations of Computational Mathematics, in press, pp. 1–55, 2015.
- 17 N. Guglielmi and M. Zennaro: *Canonical construction of Barabanov polytope norms and antinorms for sets of matrices*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 36, pp. 634–655, 2015.
- 18 N. Guglielmi and E. Hairer: *Path-regularization of linear neutral delay differential equations with several delays*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 36, pp. 634–655, 2015.
- 19 N. Guglielmi and V.Yu. Protasov: *Invariant polytopes of sets of matrices with application to regularity of wavelets and subdivisions*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 37, pp. 18–52, 2016.

- 20 N. Guglielmi and E. Hairer: *Classification of hidden dynamics in discontinuous dynamical systems*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 14, pp. 1454–1477, 2015.
- 21 N. Guglielmi and M. Manetta, *An iterative method for computing robustness of polynomial stability*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 232, pp. 638–653, 2016.
- 22 M. Charina, C. Conti, N. Guglielmi and V.Yu. Protasov, *Regularity of Non-Stationary Subdivision*, Numerische Mathematik, published online, May 2016.
- 23 S. Maset: *An abstract framework in the numerical solution of boundary value problems for neutral functional differential equations*, Numerische Mathematik, doi: 10.1007/s00211-015-0754-1, 2015.
- 24 S. Maset: *The Collocation Method in the Numerical Solution of Boundary Value Problems for Neutral Functional Differential Equations. Part I: Convergence Results*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 53, pp. 2771-2793, 2015.
- 25 S. Maset: *The Collocation Method in the Numerical Solution of Boundary Value Problems for Neutral Functional Differential Equations. Part II: Differential Equations with Deviating Arguments*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 53, pp. 2794-2821, 2015.
- 26 M. Brundu and M. Zennaro: *Multicones, duality and invariance for families of matrices*, ArXiv:1606.09398 [math.SP] (2016), 62 pages

Comunicazioni cofinanziate dal progetto

- 1 D. Breda “Dalle equazioni differenziali funzionali con ritardo alle equazioni differenziali ordinarie”, XX Congresso dell’Unione Matematica Italiana. Siena 7–12 settembre 2015 (*)
- 2 D. Breda “Approximating the dynamics of delay models by pseudospectral methods: infinitesimal generator for the linear case”, Stability and Discretization Issues in Differential Equations 2016, Trieste 21-26 Giugno 2016
- 3 D. Liessi “Dynamics of Host-Parasitoid Interactions and Coexistence of Different Hosts”, Short Thematic Program on DDEs, Toronto, 19-22 maggio 2015 (*)
- 4 D. Liessi “Approximating the dynamics of delay models by pseudospectral methods: solution operator for the linear case”, Stability and Discretization Issues in Differential Equations 2016, Trieste 21-24 Giugno 2016
- 5 F. Scarabel “Bifurcation of nonlinear delay models: back to ODEs with some numerical examples”, Short Thematic Program on DDEs, Toronto, 19-22 maggio 2015

- 6 F. Scarabel “Approximating the dynamics of delay models by pseudospectral methods: the nonlinear case for coupled renewal and delay differential equations”, Stability and Discretization Issues in Differential Equations 2016, Trieste 21-24 Giugno 2016
- 7 R. Vermiglio “The stability analysis of delay differential equations with uncertain parameters”, XX Congresso dell’Unione Matematica Italiana. Siena 7–12 settembre 2015 (*)
- 8 R. Vermiglio “Approximating the dynamics of delay models by pseudospectral methods: the nonlinear case for delay differential equations”, Stability and Discretization Issues in Differential Equations 2016, Trieste 21-24 Giugno 2016
- 9 S. Maset “An abstract framework in the numerical solution of boundary value problems for neutral functional differential equations”. Delay Equations at Fields Toronto (Canada), 19 - 22 Maggio, 2015.
- 10 N. Guglielmi “Matrix stabilization using differential equation”, Stability and Discretization Issues in Differential Equations 2016, Trieste 21-24 Giugno 2016