

**RELAZIONE FINALE**  
**PROGETTO GIOVANI RICERCATORI GNCS**  
**2013**

**Titolo progetto:** Approccio mediante equazioni integrali alla risoluzione numerica di problemi di Finanza Quantitativa

**Coordinatore:** Chiara GUARDASONI

Come descritto all'atto della presentazione, il tema del progetto è l'applicazione del metodo degli elementi al contorno (BEM) alla finanza computazionale, in particolare nella valutazione di opzioni europee con barriera.

Le opzioni "europee" sono contratti derivati in cui si stabilisce il diritto di comprare (opzione call) o vendere (opzione put) ad una prefissata scadenza, ad un prezzo prestabilito (strike price), una particolare attività finanziaria, che può essere costituita da azioni, titoli a reddito fisso, valuta etc.; a scadenza il compratore valuterà se il prezzo strike, comparato con il prezzo di mercato corrente dell'attività sottostante, risulta vantaggioso e sceglierà di esercitare o meno il diritto di comprare o vendere. Nel caso di "opzioni con barriera", questo diritto si attiva o si estingue quando l'attività sottostante raggiunge una certa quotazione.

E' in questo contesto che i vantaggi del metodo BEM, rispetto ai metodi di dominio, quali i metodi agli elementi finiti (FEM) o metodi alle differenze finite (FDM), si evidenziano maggiormente: solo il bordo del dominio deve essere discretizzato, in particolare, i problemi esterni con domini illimitati e contorni limitati vengono gestiti facilmente come i problemi interni; la soluzione all'interno del dominio è approssimata con un tasso di convergenza piuttosto elevato e può essere valutata in particolari punti e non necessariamente ovunque; le condizioni all'infinito sono implicitamente soddisfatte. Il vantaggio di poter valutare la soluzione "puntualmente" anziché globalmente è molto rilevante poiché, a livello finanziario, si ha interesse a conoscere la soluzione solo per determinati valori del titolo azionario sottostante e, pur trattandosi di un problema dipendente dal tempo, si ha interesse a conoscere la soluzione solo nell'istante di valutazione e non per l'intera durata del contratto.

**Attività svolte:** Il metodo BEM è stato inizialmente applicato al modello di Black-Scholes a coefficienti costanti, in cui il valore di un'opzione è una variabile dipendente dal tempo e dal valore del titolo azionario su cui è stipulata. I risultati numerici ottenuti sono stati riportati in [P1] e presentati alle conferenze [C2] e [C4]; grazie anche ai suggerimenti dei referee, è stata fatta un'ampia analisi delle prestazioni del metodo BEM rispetto ai più utilizzati metodi alle differenze finite con diversi schemi di discretizzazione temporale.

Pur essendo il modello di Black-Scholes ancora largamente utilizzato nella pratica, tuttavia la letteratura accademica ne ha evidenziato i forti limiti. Pertanto, abbiamo proceduto all'applicazione del metodo BEM ai più realistici modelli di Heston e Bates in cui il valore di un'opzione è una variabile dipendente dal tempo, dal valore del titolo azionario su cui è stipulata e dalla volatilità di questo titolo.

Il metodo BEM si basa sulla riformulazione in forma integrale del problema differenziale di partenza attraverso la soluzione fondamentale o altrimenti detta *funzione di Green*; nei modelli di Heston e Bates, questa funzione non è esplicitamente nota ma abbiamo dimostrato che è possibile ottenerla, attraverso considerazioni di natura probabilistica, come prodotto di più funzioni e applicando anti-trasformate numeriche di Fourier. Abbiamo inoltre ricavato la formulazione integrale corretta per questi modelli basati su equazioni integro-differenziali a coefficienti non costanti.

Il metodo BEM accostato ai nuovi modelli matematici che forniscono una valutazione delle opzioni a barriera ha suscitato interesse perché queste opzioni sono largamente quotate e commercializzate

nei mercati finanziari ma al momento in letteratura c'è scarsità di tecniche numeriche ad hoc. Il metodo che viene di fatto adottato è il metodo Monte Carlo, nonostante in questo contesto sia scarsamente affidabile e dispendioso a causa della sua lenta convergenza.

I risultati ottenuti con il metodo BEM per i modelli di Heston e Bates confrontati con i risultati ottenuti attraverso il metodo Monte Carlo sono stati illustrati alle conferenze [C1], [C2], [C3], [C4] e saranno riportati nell'articolo [P2] in sottomissione.

Osservando che modelli simili trovano applicazione anche nell'ambito della valutazione del rischio di credito e dei derivati creditizi, il metodo è stato proposto anche alla conferenza [C5].

### **Presentazioni a convegni:**

[C1]. *International Symposium on Differential Equations and Stochastic Analysis in Mathematical Finance (ISDESAMF)*, Sanya (Cina), 12-16 luglio 2014;  
comunicazione: *Fast numerical pricing of barrier options under stochastic volatility & jumps*.

[C2]. *Insurance & Finance day*, Parma, 3 luglio 2014;  
comunicazione: *A boundary element method for pricing barriers options*.

[C3]. *Convegno European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI)*, Taormina (Messina), 09-13 giugno 2014;  
comunicazione: *A boundary element method for pricing barriers options*.

[C4]. *XV Workshop on Quantitative Finance*, Firenze, January 23-24, 2014;  
comunicazione: *Fast Numerical Pricing of Barriers Options under Stochastic Volatility and Jumps*.

[C5]. *7th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE)*, London (United Kingdom), December 14-16, 2013;  
comunicazione: *A boundary element PDE approach to corporate debt*.

### **Articoli:**

[P1]. C.Guardasoni, S.Sanfelici: *A Boundary Element approach to barrier option in Black-Scholes framework*, *Journal of Computer Mathematics*, in seconda revisione.

[P2]. C.Guardasoni, S.Sanfelici: *Fast numerical pricing of barrier options*, in sottomissione.

