

Relazione scientifica sul progetto GNCS 2015

Metodi numerici per l'ottimizzazione non convessa o non differenziabile e applicazioni

Responsabile:Valentina De Simone
Ricercatore a tempo indeterminato
Seconda Università degli Studi di Napoli, tel.0823 274748
`valentina.desimone@unina2.it`

Finanziamento assegnato: 5000 euro

Partecipanti: Valentina De Simone (UniNa2)
Alessandro Benfenati (UniFe), Silvia Bonettini (UniFe)
Daniela di Serafino (UniNa2), Germana Landi (UniBo)
Mario Guarracino (ICAR-CNR-Na), Marco Prato (UniMoRe)
Gerardo Toraldo (UniNa), Riccardo Zanella(UniFi)

1. Introduzione

Molti problemi scientifici vengono formulati come problemi di ottimizzazione in cui la non convessità o la non regolarità della funzione obiettivo, ed eventualmente dei vincoli, tengono conto di caratteristiche specifiche del problema in esame.

L'attività di ricerca svolta nell'ambito del progetto è stata dedicata allo sviluppo di metodi numerici efficienti ed accurati per la risoluzione di tali problemi. Infatti, nonostante i progressi dell'ottimizzazione numerica la risoluzione di problemi non convessi o non differenziabili presenta ancora questioni aperte visto che i metodi dell'ottimizzazione "classica" non possono più essere direttamente utilizzati. L'assenza di regolarità della funzione obiettivo, ad esempio, non permette di definire il gradiente in ogni punto, rendendo difficile la definizione di direzione di discesa e facendo perdere di efficacia anche i criteri di arresto, nel senso che la norma del gradiente nel punto corrente, se pure definita, non è più indicativa della vicinanza o meno a un punto di minimo. Per questo motivo a partire dagli anni'60 l'attività di ricerca è volta alla possibilità di definire metodi *ad hoc*, estendendo il concetto di gradiente a punti non differenziabili introducendo la nozione di subdifferenziale o di gradiente generalizzato. In questa prima classe di metodi

(nonsmoothed methods) rientrano metodi del sub-gradiente, metodi proximal gradient, bundle, Un approccio alternativo (smoothed methods), invece, si basa su riformulazioni del problema che elimina la non regolarità, ad esempio usando uno splitting di variabili o approssimazioni di tipo Huber, permettendo così l'applicazione di tecniche standard del primo e secondo ordine.

Invece in assenza di ipotesi di convessità il problema potrebbe avere più punti di minimo; generalmente le strategie per il trattamento della non convessità sono basate su una approssimazione o riformulazione convessa del problema in esame mediante un "functional lifting" .

I risultati prodotti nel progetto si inquadrano nelle strategie sopra descritte e sono presentati in 17 lavori pubblicati, in corso di stampa o sottomessi per la pubblicazione descritti (paragrafo 3). Tali risultati sono stati anche oggetto di varie conferenze (paragrafo 4).

2. Descrizione attività scientifica

Nel periodo del progetto le attività di ricerca sono state concentrate sullo sviluppo e analisi di metodologie numeriche innovative per problemi non convessi e/o non differenziabili con particolare attenzione a problemi in cui la funzione obiettivo della forma $f = f_1 + f_2$, con f_1 convessa non necessariamente differenziabile e f_2 funzione differenziabile non necessariamente convessa nel contesto di applicazioni caratterizzate da grandi quantità di dati, tra cui l'elaborazione di immagini e la classificazione. In particolare, sono stati prodotti i seguenti risultati:

- un algoritmo per il problema della segmentazione, descritto da un modello variazione region-based; tale algoritmo è basato su una modifica del metodo del gradiente proiettato spettrale (SPG) in modo da effettuare una minimizzazione del funzionale energia all'interno del singolo passo di SPG. E' stata effettuata un'analisi della convergenza e sono stati effettuati esperimenti numerici su un insieme di immagini reali e sinteti che mostrare l'efficacia del metodo proposto [1];
- uno schema a metrica variabile nel contesto di metodi di proiezione dell' ϵ -subgradiente per problemi convessi, vincolati e non differenziabili, in combinazione con due differenti strategie per la scelta del passo [3];
- un nuovo metodo di tipo proximal-gradient per la minimizzazione della somma di una funzione differenziabile, eventualmente non convessa, ed una convessa, eventualmente non differenziabile, basato su una metrica differente al variare delle iterazioni e sul calcolo inesatto del punto prossimale che definisce la direzione di discesa [6];
- un algoritmo di tipo forward-backward inerziale scalato basato nuovamente su una metrica differente al variare delle iterazioni e su un passo di estrapolazione opportuno per la minimizzazione di un funzionale convesso dato dalla somma di una componente differenziabile e una non differenziabile [4];

- la generalizzazione di una recente strategia per la scelta del parametro di lunghezza del passo proposta per metodi del gradiente non scalati per problemi di ottimizzazione differenziabile non vincolata al caso scalato e vincolato [12], con applicazione alla ricostruzione di immagini microscopiche [13];
- due schemi di minimizzazione alternata per problemi di deconvoluzione cieca di immagini, il primo riguardante il caso di noise Gaussiano e basato su una generalizzazione di un metodo di minimizzazione linearizzata alternata prossimale recentemente proposto [9], e il secondo nel caso generale e basato su una proiezione del gradiente in una norma non Euclidea [5]. Quest'ultimo approccio è stato applicato inoltre alla deconvoluzione cieca di immagini sincole e multiple affette da rumore Poissoniano [14,15,16];
- la dimostrazione della convergenza del metodo del gradiente proiettato scalato per funzioni convesse a un punto di minimo vincolato sotto opportune ipotesi sugli autovalori delle matrici di scaling utilizzate, e la dimostrazione della velocità di convergenza $\mathcal{O}(1/k)$ rispetto ai valori della funzione obiettivo nel caso di gradiente della funzione obiettivo Lipschitz continuo [8];
- un algoritmo per il problema di denoising formulato come problema di ottimizzazione vincolata, utilizzando un'approssimazione differenziale della funzione obiettivo. In particolare è stata proposta una modifica del metodo di Newton vincolato dove la direzione di discesa è ottenuta risolvendo in modo approssimato un sottoproblema modificato su una sfera di raggio opportuno. È stata effettuata un'analisi della convergenza e sono stati effettuati esperimenti numerici su un insieme di immagini reali e sinteti che mostrano l'efficacia del metodo proposto [10];
- un modello matematico per la ricostruzione dell'immagine della mammella nella tomosintesi digitale polienergetica che tiene conto della varietà di materiali che compongono l'oggetto e della natura polienergetica del fascio di raggi X. Utilizzando questo modello polienergetico-multimateriale, la ricostruzione dell'immagine di tomosintesi è stata ricondotta alla formulazione di un problema dei minimi quadrati non lineare su larga scala la cui soluzione rappresenta le percentuali dei materiali del volume assegnato. Per la soluzione del problema ai minimi quadrati non lineari è stato utilizzato il metodo di Gauss-Newton [11];
- tecniche di preconditionamento per sequenze di sistemi lineari in cui le matrici differiscono tra loro sulla diagonale [2], come nucleo computazionale di metodi del secondo ordine per problemi non differenziali in applicazioni di tipo large scale, dove le proprietà del problema permettono di ridurre il costo delle operazioni di algebra lineare che coinvolgono la matrice hessiana;
- un modello matematico per la classificazione di dati basato su una regolarizzazione in norma L_1 in modo da promuovere la sparsità all'interno delle caratteristiche utilizzate nella classificazione, mantenendo le più significative. Primi risultati mostrano la validità del modello in termini di accuratezza [17];

3. Pubblicazioni

- 1 Antonelli L., De Simone V. and di Serafino D. 2016, On the application of the spectral projected gradient method in image segmentation, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **54** (1), 106–116.
- 2 Bellavia S, De Simone V., di Serafino D. and Morini B., On the update of constraint preconditioners for regularized KKT systems, Computational Optimization and Applications, ISSN: 0926-6003, to appear (doi: 10.1007/s10589-016-9830-4).
- 3 Bonettini S., Benfenati A. and Ruggiero V., Scaling techniques for ϵ -subgradient projection methods, submitted to *SIAM Journal on Optimization*.
- 4 Bonettini S., Porta F. and Ruggiero V., A variable metric forward–backward method with extrapolation, submitted to *SIAM Journal on Scientific Computing*.
- 5 Bonettini S., Prato M. and Rebegoldi S., A cyclic block coordinate descent method with generalized gradient projections, submitted to *Applied Mathematics and Computation*.
- 6 Bonettini S., Loris I., Porta F. and Prato M. 2015, Variable metric inexact line-search based methods for nonsmooth optimization, *SIAM Journal on Optimization* **26** , 891-921.
- 7 Bonettini S., Chiuso A. and Prato M. 2015, A scaled gradient projection method for Bayesian learning in dynamical systems, *SIAM Journal on Scientific Computing* **37**, A1297-A1318.
- 8 Bonettini S. and Prato M. 2015, New convergence results for the scaled gradient projection method, *Inverse Problems* **31**, 095008.
- 9 Cornelio A., Porta F. and Prato M. 2015, A convergent least-squares regularized blind deconvolution approach, *Applied Mathematics and Computation* **259**, 173-186.
- 10 Landi G. 2015, A method for constrained TVL^p image denoising, submitted.
- 11 Landi G., Loli Piccolomini E., Nagy J G. 2015, Numerical solution of a nonlinear least squares problem in digital breast tomosynthesis, *Journal of Physics: Conference Series* **657**(1), 012006.
- 12 Porta F., Prato M. and Zanni L. 2015, A new steplength selection for scaled gradient methods with application to image deblurring, *Journal of Scientific Computing* **65**, 895-919.
- 13 Porta F., Zanella R., Zanghirati G. and Zanni L. 2015, Limited-memory scaled gradient projection methods for real-time image deconvolution in microscopy, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **21**, 112–127.

- 14 Prato M., La Camera A., Bonettini S. and Bertero M. 2015, The scaled gradient projection method: an application to nonconvex optimization. *Proceedings of PIERS 2015*, 2332-2336.
- 15 Prato M., La Camera A., Bonettini S., Rebegoldi S., Bertero M. and Boccacci P. 2015, A blind deconvolution method for ground based telescopes and Fizeau interferometers, *New Astronomy* **40**, 1-13.
- 16 Rebegoldi S., Bonettini S. and Prato M. 2015, Application of cyclic block generalized gradient projection methods to Poisson blind deconvolution. *Proceedings of the 23rd European Signal Processing Conference 2015*, 225-229.
- 17 Viola, Sangiovanni, Toraldo, Guarracino 2016, A generalized eigenvalues classifier with embedded feature selection, *Optimization Letters*, in press.

4. Partecipazione a convegni

I partecipanti al progetto hanno presentato le proprie attività di ricerca ai seguenti convegni e workshop:

1. 5th International Workshop on New Computational methods for Inverse Problems, Cachan, Francia (maggio 2015);
2. PROGRESS IN ELECTROMAGNETICS RESEARCH SYMPOSIUM (PIERS) 2015, Praga (luglio 2015);
3. 22nd International Symposium on Mathematical Programming - ISMP2015, Pittsburgh, PA, USA (luglio 2015);
4. XX Convegno UMI, Siena (settembre 2015);
5. Second Workshop on Optimization for Image and Signal Processing, Institut Henri Poincaré (IHP), Parigi (dicembre 2015);
6. Numerical Computations: Theory and Algorithms, International Workshop, Pizzo Calabro (giugno 2016).