Progetto GNCS-INDAM "Giovani Ricercatori" 2013

Integrazione long-term di sistemi Hamiltoniani e problemi oscillanti

RESPONSABILE DEL PROGETTO:

dott. RAFFAELE D'AMBROSIO

(Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno)

RELAZIONE FINALE

Il fondo GNCS-INDAM "Giovani Ricercatori" 2013 è stato utilizzato dal dott. Raffaele D'Ambrosio per la partecipazione ai seguenti convegni:

- Convegno GNCS, a Montecatini Terme (FI), nei giorni 19 e 20 febbraio 2014;
- 8th Workshop SDS2014-STRUCTURAL DYNAMICAL SYSTEMS: Computational Aspects, a Capitolo (BA), dal 10 al 13 giugno 2014;
- 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, a Madrid (Spagna) dal 7 a 11 luglio 2014.

I frutti della ricerca scientifica supportata dal fondo di cui sopra sono state le seguenti comunicazioni a convegno

[C1] R. D'Ambrosio, Nearly preserving numerical methods for differential equations, 8th Workshop SDS2012 STRUCTURAL DYNAMICAL SYSTEM: Computational Aspects, Capitolo, Monopoli (Italia), 12-15 Giugno 2012.

[C2] R. D'Ambrosio, G. De Martino, B. Paternoster, Nearly conservative multi-value numerical methods for Hamiltonian problems, 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid (Spagna), 7-11 Luglio 2014.

e i seguenti lavori scientifici

[P1] R. D'Ambrosio, G. De Martino, B. Paternoster, A symmetric nearly preserving general linear method for Hamiltonian problems, sottoposto.

[P2] R. D'Ambrosio, G. De Martino, B. Paternoster, General Nyström methods in Nordsieck form: error e order analysis, in preparazione.

che recheranno, una volta pubblicati, la dicitura "*This work was supported by National Group of Computing Science (GNCS-INDAM)*".

Per quanto attiene allo specifico dei risultati ottenuti, segue una breve sintesi per argomenti.

- *Metodi multi-value per sistemi Hamiltoniani*

  Nell'ambito dell'integrazione geometrica di problemi Hamiltoniani, l'indagine scientifica contenuta nel lavoro [P1] ha prevalentemente riguardato metodi numerici di tipo *multi-value*. Lo schema numerico legato a metodi siffatti produce un vettore di approssimazioni che viene aggiornato lungo la discretizzazione, coinvolgendo un più alto numero di gradi di libertà che migliora le barriere d'ordine e stabilità esistenti in letteratura. Nel caso dei problemi Hamiltoniani, piuttosto che far fronte ad elevati requisiti di accuratezza sulla soluzione numerica del problema, ci siamo occupati di conservarne accuratamente gli invarianti, con particolare riferimento all'energia e al momento angolare. A tal proposito, si è considerata in [P1] la costruzione di nuovi metodi *multi-value* che godono delle seguenti proprietà:

- simmetria, che rappresenta la controparte numerica della reversibilità nel caso di sistemi meccanici reversibili. Un vantaggio significativo, nel caso dei metodi simmetrici, è l'ordine pari di convergenza, che riduce notevolmente il numero di condizioni d'ordine da imporre nella costruzione di metodi d'ordine alto;
- limitatezza delle componenti parassite di tipo "zero-growth parameter", ottenuta annulando il primo termine del campo vettoriale delle equazioni modificate associate alle componenti parassite. Tali componenti sono dovuti all'intrinseca natura multi-value del metodo e necessitano di essere limitate a lungo termine;
- costante d'errore minima nella deviazione Hamiltoniana. Poiché il termine principale nelle stime teoriche della deviazione Hamiltoniana è di tipo $O(h^p)$, si è ritenuto utile sfruttare alcuni dei gradi di libertà presenti nel metodo ai fini di avere minima costante d'errore nella conservazione della Hamiltonana del sistema, a vantaggio dell'accuratezza della medesima conservazione.

Attraverso tecniche di stima teorica dell'errore Hamiltoniano, si è compreso che gli effetti della simmetria, combinata alla proprietà *zero-growth parameters*, hanno una buona ricaduta sulla limitatezza delle componenti parassite: esse, difatti, non subiscono alcun *blow-up* su intervalli di ampiezza $O(h^{-1})$ nel caso di *zero-growth parameters*, ampiezza che aumenta a $O(h^{-2})$ nel caso in cui il metodo risulti anche simmetrico. Tale proprietà si evince chiaramente anche nei metodi costruiti in [P1].

I metodi costruiti ed analizzati secondo le specifiche summenzionate, sono stati testati su un'ampia collezione di problemi test, anche di interesse applicativo. Grazie ad essi, ad esempio, si è ritrovata sperimentalmente la simpletticità dello spazio delle fasi generato dal sistema Hamiltoniano che descrive il moto di rivoluzione dei pianeti del sistema solare intorno al sole, integrato in [P1] a partire da dati reali desunti dalle misurazioni messe a disposizione dal sistema Nasa Horizons (http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons).

- *Metodi P-stabili d'ordine alto per problemi oscillanti*

Questo filone di ricerca ha prevalentemente interessato la risoluzione numerica di problemi stiff periodici, la cui dinamica è governata da sistemi di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, con soluzione periodica o oscillante. In questo ambito, il punto di partenza è stata la teoria dei metodi multi-value introdotta in *D'Ambrosio, Esposito, Paternoster, Numer. Algor. 61(2), 331-349 (2012)*, ove sono stati forniti strumenti rigorosi per l'analisi delle loro proprietà di convergenza.

Come evidenziato nella proposta progettuale finanziata, un problema aperto nell'ambito delle equazioni del secondo ordine con soluzione oscillante è la costruzione di metodi P-stabili d'ordine alto. La P-stabilità è importante per risolvere problemi stiff periodici, poiché garantisce che la scelta del passo di integrazione è indipendente dal valore delle frequenze delle componenti del vettore soluzione, ma dipende solo dall'accuratezza desiderata.

Il lavoro in preparazione [P2], prossimo alla sottomissione, prende le mosse dalla famiglia dei metodi multi-value di tipo Nordsieck. Per metodi siffatti si è studiata la famiglia delle condizioni d'ordine, nell'intento di fornirne un set minimale ai fini costruttivi. Ciò ha portato alla costruzione di famiglie generali di metodi di tipo Nordsieck, di ordine alto, di cui sono state successivamente studiate le proprietà di stabilità, in confronto con i migliori metodi esistenti in letteratura. In particolare, il migliore rapporto tra proprietà di stabilità ed ordine di convergenza esistente in letteratura è raggiunto sono i metodi Runge-Kutta-Nyström di collocazione indiretta sui nodi di Gauss-Legendre, che sono P-stabili e hanno ordine di convergenza $2s$, essendo s il numero di stadi interni.

I metodi di tipo Nordsieck introdotti, a parità di costo computazionale ed analoghe proprietà di stabilità, raggiungono un ordine di convergenza più alto e si rivelano più performanti nella risoluzione di sistemi stiff periodici.

Fisciano, 14 ottobre 2014

In fede,

Raffaele D'Ambrosio