

Relazione finale sul progetto GNCS 2015

Metodi numerici semi-impliciti e semi-lagrangiani per sistemi iperbolici

Responsabile: Luca Bonaventura
Professore Associato di Analisi Numerica
MOX - Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano, tel. 02-23994600
`luca.bonaventura@polimi.it`

Numero dei partecipanti: 13

Finanziamento disponibile: 7.000 Euro

1 Resoconto scientifico

Il progetto si proponeva di sviluppare ed analizzare metodi numerici accurati ed efficienti per l' approssimazione di equazioni iperboliche e leggi di conservazione nonlineari in particolari regimi fluidodinamici (basso numero di Mach e di Froude) e generalizzazioni dei classici metodi semi-lagrangiani a leggi di conservazione nonlineari per problemi di fluidodinamica e per fenomeni multiscala. Il progetto disponeva di un budget di 6200 Euro, depositati come fondo di ricerca presso il Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano, oltre a 800 Euro per l'invito di professori visitatori, amministrati direttamente dall'INDAM. Al progetto, oltre al coordinatore, hanno partecipato come ricercatori strutturati: Dr. Sebastiano Boscarino, Ricercatore (Università di Catania), D.ssa Elisabetta Carlini, Ricercatore (Università Sapienza di Roma), Dr. Emiliano Cristiani, Ricercatore (CNR Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Roma), Prof. Roberto Ferretti, Professore Associato (Università Roma Tre), Prof.ssa Gabriella Puppo, Professore Associato (Università dell' Insubria), Prof. Giovanni Russo, Professore ordinario (Università di Catania), Dr. Matteo Semplice, Ricercatore (Università di Torino). Hanno inoltre partecipato, come ricercatori non strutturati: Dr. Simone Cacace, Assegnista (Università Sapienza di Roma), Dr. Leonardo Scandurra, Dottorando (Università di Catania), Dr. Giuseppe Stracquadanio, Dottorando (Università di Parma) Dr. Giovanni Tumolo, Borsista post-dottorato (Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Trieste), Dr. Giuseppe Visconti, Dottorando (Università dell' Insubria).

Nell'ambito del progetto sono state svolte le seguenti attività di ricerca:

- *M. Semplice, G. Puppo, G. Russo*

L'approccio proposto originariamente in [13] è stato esteso al calcolo degli stadi interni di un metodo Runge-Kutta applicato alla discretizzazione di un sistema iperbolico. In particolare, nel metodo proposto gli stadi interni sono calcolati utilizzando le equazioni in una opportuna forma non conservativa, con struttura più semplice della corrispondente forma conservativa. Il passo di calcolo finale della soluzione utilizza invece la forma conservativa delle equazioni, in modo da soddisfare le ipotesi del teorema di Lax Wendroff, che garantisce la corretta velocità di propagazione delle discontinuità. I metodi sviluppati sono stati applicati a problemi di gasdinamica classica e relativistica. In quest'ultimo caso, otteniamo un forte guadagno in termini di velocità computazionale, come era previsto. Più in generale, nell'ambito degli schemi numerici per i sistemi di leggi di conservazione, si sono sviluppate e studiate nuove tecniche per la discretizzazione ai volumi finiti di leggi di conservazione e bilancio con ordine di accuratezza almeno 3.

I risultati sopra descritti sono stati presentati in varie pubblicazioni. La pubblicazione [18] sull'estensione dei metodi di ricostruzione dei valori ai bordi di tipo CWENO al caso di due dimensioni spaziali, per griglie non globalmente cartesiane (precisamente di tipo quad-tree). Nello stesso lavoro è anche presente una guida per l'uso efficace dell'indicatore d'errore di entropia numerica per simulazioni h -adattive di leggi di conservazione. La pubblicazione [14] riguardante l'indicatore d'errore "produzione numerica di entropia". In particolare la sua definizione è stata estesa dal caso delle leggi di conservazione a quello delle leggi di bilancio. Nello stesso lavoro sono stati anche introdotte ricostruzioni spaziali 1D di ordine 3 e 4 adatte al calcolo accurato dei termini di sorgente. È stato infine svolto uno studio approfondito del ruolo del parametro ϵ nelle procedure di ricostruzione WENO e CWENO di ordine 3, in particolare estendendo alcuni risultati precedenti al caso di griglie non uniformi. I risultati sono pubblicati in [8].

- *L. Scandurra, G. Russo, S. Boscarino*

Sono stati studiati metodi numerici per la risoluzione delle equazioni di Eulero in forma conservativa con grande escursione del numero di Mach, al fine di verificare la proprietà Asymptotic-Preserving (AP), ovvero ottenere gli stessi risultati numerici confrontando dei test per fluidi incompressibili con i nostri risultati per fluidi comprimibili, facendo tendere il numero di Mach al limite zero. In particolare sono state studiate le equazioni di Eulero nella gasdinamica isentropica e generale. In entrambi i casi, si sono ottenuti: - schemi al secondo ordine nello spazio: mediante l'uso di griglie sfalsate e lo schema centrale di Nessyahu-Tadmor (nel caso mono-dimensionale) e lo schema centrale di Jiang-Tadmor (nel caso bi-dimensionale). - schemi al secondo ordine nel tempo: mediante la combinazione di schemi Runge Kutta (RK) e di schemi IMpliciti/EXpliciti (IMEX) per la gasdinamica isentropica e di schemi semi-IMpliciti/EXpliciti (S-IMEX) per la gasdinamica completa.

- *G. Russo, G. Stracquadanio*

Sono stati studiati metodi semi-lagrangiani di ordine alto per modelli BGK, proponendo in particolare una tecnica per il trattamento delle condizioni al contorno. I risultati sono stati presentati nelle pubblicazioni [10], [11], [12].

- *G. Puppo, M. Semplice, G. Visconti*

Sono stati estesi i risultati presentati in [17] relativi alla applicazione di tecniche di integrazione implicite per studiare l'evoluzione all'equilibrio di modelli cinetici proposti in [9], generalizzati a più popolazioni per tener conto dell'eterogeneità dei flussi di traffico. In particolare, sono stati proposti modelli di traffico più generali di quelli proposti in [9], dei quali si è in grado di calcolare esplicitamente le soluzioni di equilibrio. Si ottiene, a livello macroscopico, una corrispondenza molto buona con i dati sperimentali. Con la formulazione di un nuovo modello per il traffico a singola popolazione [16], basato su una legge di bilancio di tipo Boltzmann, si è riusciti a determinare l'esistenza e l'unicità della soluzione di equilibrio in tempo. Quest'ultima è caratterizzata dal fatto di essere quantizzata su un numero finito di velocità discrete. Si è inoltre dimostrato che la discretizzazione ai volumi finiti del modello permette di recuperare la soluzione di equilibrio continua con un numero finito e ridotto di celle in velocità, univocamente definito dal parametro fisico che controlla l'accelerazione dei veicoli.

Il ridotto costo computazionale del modello discreto permette di estendere la costruzione del modello cinetico a singola popolazione al caso di più popolazioni [15, 17]. Lo scopo è quello di descrivere il traffico come una miscela di più veicoli che si differenziano per caratteristiche microscopiche. La modellizzazione di interazioni binarie fra diverse classi di veicoli permette di ottenere diagrammi densità-flusso che ben riproducono quelli sperimentali. In particolare, i diagrammi determinati dal modello multipopolazione risultano essere multivalued, ovvero mostrano flussi diversi per stesse densità di veicoli sulla strada. Questo comportamento è stato ottenuto naturalmente come risultato dell'eterogenea composizione del flusso veicolare.

In collaborazione con il Prof. Michael Herty (RWTH Aachen) si è inoltre studiata l'approssimazione di Fokker-Planck di un modello cinetico per il traffico di tipo Boltzmann. La tecnica del *grazing collision limit* permette di semplificare l'analisi dello stato stazionario, rimpiazzando l'operatore collisionale integrale con operatori differenziali. In questo modo, si è riusciti a determinare un modello con diagrammi multivalued ma con stato stazionario più ricco di quello precedentemente trovato che risultava quantizzato su un numero finito di velocità. Un articolo su questo lavoro è attualmente in preparazione.

- *R. Ferretti, S. Cacace, E. Carlini, E. Cristiani*

Si è studiato l'accoppiamento tra schemi lagrangiani puri di tipo Smoothed Particle Hydrodynamics e schemi euleriani, con lo scopo di usare i primi per ridurre la dispersione numerica dei secondi, e con applicazioni a problemi di trasporto puro e leggi di conservazione. I risultati sono stati presentati nella pubblicazione [4]. Sono stati proposti schemi semi-lagrangiani e conservativi per l'equazione di Fokker-Planck, che sono stati estesi a modelli di traffico pedonale. I risultati sono stati presentati in [7], [6]. Inoltre, è stato proposto e validato in [5] uno schema semi-lagrangiano basato su ricostruzioni spaziali di tipo Radial Basis Functions per un modello con termini di diffusione degenera di tipo curvatura media, in uso nella ricostruzione delle superfici a partire da insiemi sparsi di punti.

- *L. Bonaventura, R. Ferretti, G. Tumolo*

Si sono proposti schemi semi-lagrangiani per diverse classi di problemi, anche con termini di diffusione eventualmente degenera. Lo studio di una discretizzazione totalmente semi-lagrangiana per equazioni di diffusione-transporto è stato esteso in [2] al caso di schemi SL in forma di flusso. Schemi semi-impliciti e semi-lagrangiani adattivi agli elementi finiti discontinui per le equazioni di delle acque basse e per le equazioni di Eulero sono stati proposti in [20] ed estesi in [19] a formulazioni conservative delle stesse equazioni. Sono stati inoltre studiati in [3] delle varianti monotone del metodo di discretizzazione in tempo TR-BDF2 e si è proposta in [1] una tecnica di riduzione del costo computazionale degli integratori esponenziali per l'applicazione alla discretizzazione in tempo di equazioni alle derivate parziali, basata su un approccio a decomposizione di dominio.

Tra i lavori in corso, ma iniziati nel periodo di finanziamento del progetto, si è studiato a fondo l'uso della strategia semi-lagrangiana di trattamento di piccoli termini viscosi nelle leggi di conservazione nonlineari, estendendo la applicazione di questa tecnica a casi quali l'equazione di Richards per l'infiltrazione in mezzi porosi, e l'equazione di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili. Si è inoltre intrapreso lo sviluppo di una libreria di *software* per l'implementazione efficiente delle tecniche adattive agli elementi finiti discontinui introdotte in [20],[19].

2 Attività del progetto: professori visitatori

Nel corso del progetto, è stato invitato il Prof. Christian Klingenberg (Università di Würzburg), che ha trascorso una settimana presso l'Università dell'Insubria, approfondendo la collaborazione con Gabriella Puppo, e offrendo un seminario per tutti gli studenti del Dottorato. Il Prof. Klingenberg ha trascorso a Como la settimana dal 22/2/2015 al 28/2/2015. Nel corso della settimana si sono affrontati problemi relativi a miscele di gas rarefatto e le relative tecniche di risoluzione numerica. All'incontro ha partecipato anche Marlies Pirner, dottoranda del Prof. Klingenberg e di Gabriella Puppo. Questo incontro ha iniziato una collaborazione che continua tuttora.

3 Attività del progetto: seminari e comunicazioni scientifiche

I seguenti seminari scientifici sono stati tenuti dai partecipanti sui temi del progetto:

- E. Carlini: A Semi-Lagrangian scheme for a degenerate second order Mean Field Game system, Convegno: CGS2015, Control Theory and Theory of Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, 1 Aprile 2015, Yekaterinburg, Russia
- G. Puppo: Asymptotic preserving boundary conditions for kinetic models, Convegno: High order reconstruction and well balancing techniques for hyperbolic conservation and balance laws, Torino, 15-16 Aprile 2015
- G. Visconti: An heterogeneous discrete-velocity kinetic model for traffic flow, Convegno: NumHyp2015, 15 Giugno 2015, Cortona, Italia
- L. Scandurra: Acceleration of a fixed point algorithm for Fluid-Structure Interaction (FSI) using Transpiration conditions, Scuola estiva: Reduced basis, optimal control and application to cardiovascular modeling, 24 Luglio 2015, Cortona, Italia.
- L. Scandurra: Construction of Reduced basis spaces by singular value decomposition (SVD)-proper orthogonal decomposition (POD), Scuola estiva: Reduced basis, optimal control and application to cardiovascular modeling, 30 Luglio 2015, Cortona, Italia
- E. Carlini: A Semi-Lagrangian scheme for a degenerate second order Mean Field Game system, Congresso U.M.I., Siena, 7-12 settembre 2015
- G. Visconti: Kinetic models for traffic flow resulting in a reduced space of microscopic velocities, Workshop: Mathematical Models in Social Dynamics, Politecnico di Torino 1-2 ottobre 2015
- S. Boscarino, Semi-Implicit (SI) IMEX schemes for evolutionary non linear partial differential equations, Convegno: 16th Italian Meeting on Hyperbolic Equations (Invited Speaker), L'Aquila, 22-24 Ottobre 2015
- L. Scandurra: Semi-Implicit Method for All Mach Number Flow for the Euler Equations of Gas Dynamics on Staggered Grid, Seminario: Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Germania, 3 Dicembre 2015
- G. Visconti: "Kinetic models for traffic flow resulting in a reduced space of microscopic velocities Seminario RWTH Aachen University
- G. Puppo: Behind the scenes of Finite Volume Runge-Kutta schemes, Convegno: Numerical Aspects of Hyperbolic Balance Laws and Related Problems, Ferrara, 17-19 Dicembre 2015

- R. Ferretti: Recent results and open issues in the semi-Lagrangian treatment of nonlinear balance laws, Seminario di Modellistica Differenziale Numerica, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Roma, 19 Gennaio 2016
- L. Scandurra: Semi-Implicit Method for Low Mach Number Flow for the Modelling of Traffic Jams, Congresso INDAM-GNCS, 2-4 Febbraio 2016, Montecatini Terme, 3 Febbraio 2016

4 Attività del progetto: missioni

Il progetto ha contribuito alla copertura delle spese relative alle seguenti missioni:

- M.Semplice: partecipazione alla conferenza SHARK-FV (Sharing Higher-order Advanced Know-how on Finite Volume) tenutasi nei giorni 17-22 maggio 2015 a Ofir (Portogallo)
- M.Semplice: partecipazione alla conferenza "Numerical aspects of hyperbolic balance laws and related problems" tenutasi nei giorni 17-19 dicembre 2015 a Ferrara
- L. Scandurra: Conferenza INDAM-GNCS, 2-4 Febbraio 2016, Montecatini Terme (PT), Italia;
- L. Scandurra: Visita presso Johannes Gutenberg-Universität Mainz, dal 22 Novembre al 19 Dicembre 2015. Gruppo di Ricerca: Prof.ssa Maria Lukáčová-Medvidová e Dr Georgij Bispen, Mainz, Germania
- L. Scandurra: Visita presso Imperial College London dal 23 Ottobre al 16 Novembre 2015. Gruppo di Ricerca: Prof. Pierre Degond e Prof.ssa Magali Ribot, Londra, Inghilterra
- L. Scandurra: Scuola Estiva su *Geometrical multiscale models of the cardiovascular system*. Tenuto dal Prof. Formaggia e Prof. Vergara, 20-27 Luglio 2015, SMI Cortona (AR), Italia
- L. Scandurra: Scuola Estiva su *Reduced basis, optimal control and application to cardiovascular modeling*. Tenuto dal Prof. Alfio Quarteroni e Dr Andrea Manzoni, 27-31 Luglio 2015, SMI Cortona (AR), Italia
- R. Ferretti: Workshop "Numerical aspects of hyperbolic balance laws and related problems", Ferrara, 17-19 Dic 2015 (invited speaker)
- G. Visconti: Convegno INdAM-GNCS "NumHyp2015", 15-19 Giugno 2015, (Cortona, Italia)
- G. Visconti: Periodo di studio all'RWTH Aachen University, 20 Ottobre-18 Dicembre 2015, (Aachen, Germania)
- R. Ferretti: Incontro di collaborazione scientifica, Milano MOX, 12-13 Gen 2016

5 Attività del progetto: pubblicazioni

Nell'ambito del progetto sono state prodotte le seguenti pubblicazioni:

- L. Bonaventura, Local Exponential Methods: a domain decomposition approach to exponential time integration of PDE, MOX report 24-2015, 2015
- L. Bonaventura, A. Della Rocca, Monotonicity, positivity and strong stability of the TR-BDF2 method and of its SSP extensions, arXiv:1510.04303, 2015
- L. Bonaventura, R. Ferretti, Flux Form Semi-Lagrangian methods for parabolic problems, Communications in Applied and Industrial Mathematics, in stampa, 2016
- S. Cacace, E. Cristiani, R. Ferretti, Blended numerical schemes for the advection equation and conservation laws, arXiv:1507.07092, 2015 (presentato per la pubblicazione a: M2AN)
- E. Carlini, R. Ferretti, A Semi-Lagrangian Scheme with Radial Basis Approximation for Surface Reconstruction, arXiv:1602.04626, 2015
- E. Carlini, F.J. Silva, A Semi-Lagrangian scheme for the Fokker-Planck equation, presentato al Secondo IFAC Workshop on Control of Systems, Preprint (2016)
- E. Carlini, A. Festa, F.J. Silva, M.T. Wolfram, A Semi-Lagrangian scheme for a modified version of the Hughes model for pedestrian flow, Preprint (2016), presentato per la pubblicazione a: Dynamic Games and Applications, Springer.
- I. Cravero, M. Semplice, On the accuracy of WENO and CWENO reconstructions of third order on nonuniform meshes, Journal of Scientific Computing, doi: 10.1007/s10915-015-0123-3, 2016
- M. Groppi, G. Russo, G. Stracquadanio, High order semilagrangian methods for BGK models, Communications in the Mathematical Sciences, 14:389–414, 2015
- M. Groppi and G. Russo and G. Stracquadanio, Boundary conditions for semi-Lagrangian methods for BGK models, Communications in Applied and Industrial Mathematics, in corso di stampa, 2016
- G. Puppo, M. Semplice, Well-balanced high order schemes on non-uniform grids and entropy residuals, Journal of Scientific Computing, doi: 10.1007/s10915-015-0056-x, 2016
- G. Puppo, M. Semplice, A. Tosin, G. Visconti, Kinetic models for traffic flow resulting in a reduced space of microscopic velocities, presentato per la pubblicazione a: Kinetic and Related Models, 2016
- G. Puppo, M. Semplice, A. Tosin, G. Visconti Analysis of a heterogeneous kinetic model for traffic flow, presentato per la pubblicazione a: Communications in Mathematical Sciences, 2016

- M.Semplice, A. Coco, G. Russo, Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Systems based on Third-Order Compact WENO Reconstruction, *Journal of Scientific Computing*, doi: 10.1007/s10915-015-0038-z, 2016
- G.Stracquadano, High order semi-Lagrangian methods for BGK-type models in the kinetic theory of rarefied gases, *Tesi di Dottorato, Università di Parma*,2015
- G. Tumolo, L. Bonaventura, A semi-implicit, semi-Lagrangian, DG framework for adaptive numerical weather prediction, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141:2582-2601, 2015
- G. Tumolo, A mass conservative TR-BDF2 semi-implicit semi-Lagrangian DG discretization of the shallow water equations on general structured meshes of quadrilaterals, *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, in corso di stampa, 2016

6 Attività del progetto: workshop

Il progetto si è concluso con un workshop finale dal titolo *Semi-implicit and semi-Lagrangian methods for hyperbolic problems*, tenutosi presso il MOX - Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano nei giorni 1-2 Marzo 2016. Parte dei fondi a disposizione sono stati utilizzati per l'organizzazione del workshop stesso e per coprire i costi di viaggio e pernottamento dei partecipanti al progetto. Durante il workshop la maggior parte dei partecipanti ha presentato i risultati ottenuti nel progetto e si è confrontata sui temi di ricerca del progetto con altri esperti che pure hanno partecipato. Il programma del workshop è riportato nel seguito.

- Gabriella Puppo (Università dell' Insubria): Conservative-non conservative schemes for nonlinear conservation laws.
- Matteo Semplice (Università di Torino): Very high order CWENO reconstructions for finite volume schemes
- Emiliano Cristiani (IAC-CNR, Roma): Blended numerical schemes for the advection equation
- Simone Cacace (Università Sapienza, Roma): A new approach to the numerical solution of ergodic problems for Hamilton-Jacobi equations
- Giuseppe Visconti (Università dell'Insubria): Kinetic models for traffic flow with multivalued diagrams
- Roberto Ferretti (Università di Roma 3): Recent results and open issues in the SL treatment of nonlinear conservation law
- Elisabetta Carlini (Università Sapienza, Roma): A Semi-Lagrangian scheme for the Fokker-Planck equation

- Raffaele D'Ambrosio (Università di Salerno): Modified collocation methods for stiff problems
- Leonardo Scandurra (Università di Catania): Semi-Implicit Method for All Mach Number Flow for the Euler Equations of Gas Dynamics on Staggered Grids
- Giovanni Tumolo (ICTP Abus Salam, Trieste): Recent progresses in the development of an adaptive DG dynamical core
- Francis X. Giraldo (Naval Postgraduate School, Monterey): The role of Time-Integration for Operational Geophysical Fluid Dynamics Models

7 Resoconto finanziario

Il progetto disponeva di 800 Euro per l'invito di un professore visitatore. Tali fondi sono stati utilizzati integralmente per il soggiorno del professor Christian Klingenberg (Università di Würzburg) presso l'Università dell'Insubria nella settimana dal 22/2/2015 al 28/2/2015. Una cifra di 5078 Euro è stata utilizzata per missioni effettuate dai partecipanti. In particolare, 1646,2 Euro sono stati utilizzati per missioni del personale strutturato e 3431,8 Euro per missioni del personale non strutturato. Infine, 1122 Euro sono stati utilizzati per coprire le spese di organizzazione del workshop finale del progetto.

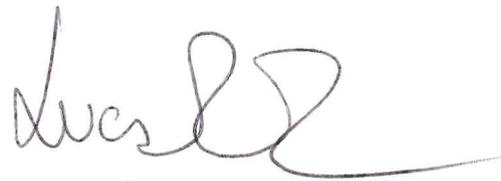
Bibliografia

- [1] L. Bonaventura. Local exponential methods: a domain decomposition approach to exponential time integration of PDEs. Technical Report MOX report 24- 2015, MOX - Politecnico di Milano, 2015.
- [2] L. Bonaventura and R. Ferretti. Flux form semi-Lagrangian methods for parabolic problems. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, in stampa, 2016.
- [3] L. Bonaventura and A. Della Rocca. Monotonicity, positivity and strong stability of the TR-BDF2 method and of its SSP extensions. Technical Report arXiv:1510.04303, arXiv, 2015. sottoposto per la pubblicazione.
- [4] S. Cacace, E. Cristiani, and R. Ferretti. Blended numerical schemes for the advection equation and conservation laws. Technical Report arXiv:1507.07092, arXiv, 2015. sottoposto per la pubblicazione a M2AN.
- [5] E. Carlini and R. Ferretti. A semi-Lagrangian scheme with radial basis approximation for surface reconstruction. Technical Report arXiv:1602.04626, arXiv, 2015. sottoposto per la pubblicazione.

- [6] E. Carlini and F.J. Silva. A semi-Lagrangian scheme for a modified version of the Hughes model for pedestrian flow. Technical report, presentato per la pubblicazione a Dynamic Games and Applications, 2016.
- [7] E. Carlini and F.J. Silva. A semi-Lagrangian scheme for the Fokker-Planck equation. Technical report, IFAC Workshop on Control of Systems, 2016.
- [8] I. Cravero and M. Semplice. On the accuracy of WENO and CWENO reconstructions of third order on nonuniform meshes. *Journal of Scientific Computing*, 2016.
- [9] L. Fermo and A. Tosin. A fully-discrete-state kinetic theory approach to modeling vehicular traffic. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 73:1533 – 1556, 2013.
- [10] M. Groppi, G. Russo, and G. Stracquadanio. High order semi-Lagrangian methods for BGK models. *Communications in the Mathematical Sciences*, 14(2):389–414, 2015.
- [11] M. Groppi, G. Russo, and G. Stracquadanio. Boundary conditions for semi-Lagrangian methods for BGK models. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, in stampa, 2016.
- [12] G. Stracquadanio. *High order semi-Lagrangian methods for BGK-type models in the kinetic theory of rarefied gases*. PhD thesis, Department of Mathematics and Computer Science, 2015.
- [13] L. Pareschi, G. Puppo, and G. Russo. Central Runge Kutta schemes for conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26:979 – 999, 2005.
- [14] G. Puppo and M. Semplice. Well-balanced high order schemes on non-uniform grids and entropy residuals. *Journal of Scientific Computing*, 2016.
- [15] G. Puppo, M. Semplice, A. Tosin, and G. Visconti. Analysis of a heterogeneous kinetic model for traffic flow. 2015. arXiv:1511.06395.
- [16] G. Puppo, M. Semplice, A. Tosin, and G. Visconti. Kinetic models for traffic flow resulting in a reduced space of microscopic velocities. 2015. arXiv:1507.08961.
- [17] G. Puppo, M. Semplice, A. Tosin, and G. Visconti. Fundamental diagrams in traffic flow: the case of heterogeneous kinetic models. *Communications in the Mathematical Sciences*, 14(3):643–669, 2016.
- [18] M. Semplice, A. Coco, and G. Russo. Adaptive mesh refinement for hyperbolic systems based on third-order Compact WENO reconstruction. *Journal of Scientific Computing*, 2016.
- [19] G. Tumolo. A mass conservative TR-BDF2 semi-implicit semi-lagrangian DG discretization of the shallow water equations on general structured meshes of quadrilaterals. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, in stampa, 2016.

- [20] G. Tumolo and L. Bonaventura. A semi-implicit, semi-Lagrangian, DG framework for adaptive numerical weather prediction. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141:2582–2601, 2015.

Milano, 1 giugno 2016

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'L. Bonaventura', written in a cursive style.